SS 2008

Oberseminar: Perverse Garben

In diesem Semester behandeln wir die Theorie der perversen Garben. Wir beginnen mit der topologischen Konstruktion von Schnittkohomologie als singulärer Kohomologietheorie und behandeln danach die garbentheoretische Konstruktion nach Deligne. Siehe zu den ersten Vorträgen auch [AGZT1], [A2]. Teilweise treten dabei subtile Probleme im Zusammenhang mit den Stratifizierungen der betrachteten Räume auf; hier erlauben wir uns eine gewisse Nachlässigkeit.

Danach führen wir den Begriff der perversen Garbe ein, und studieren die Struktur der so erhaltenen Kategorie. Als erste Anwendung nehmen wir die Springer-Korrespondenz durch (dem Ansatz von Borho und MacPherson folgend). Zum Schluss bleibt noch Zeit für eine weitere Anwendung — was genau, bleibt noch festzulegen: Vorschläge sind erwünscht.

Ergänzung: Der Einführungsartikel [Ri] von Konstanze Rietsch behandelt auch den größten Teil des Stoffs der Vorträge 1–6. Es kann sich auch ein Blick in das Buch [HTT] lohnen.

1. Vortrag: Definition von Schnittkohomologie als singuläre Kohomologie

Diskutiere das Problem, dass Poincaré-Dualität für singuläre Varietäten nicht gilt (Beispiel!), und das Ziel, eine "bessere" Kohomologietheorie für singuläre Varietäten zu definieren, siehe [GM1], Introduction, [Ki] §1, insbesondere §1.1. Definiere den Begriff der *topologischen Stratifizierung*, [GM2] 1.1, [Ki] 3.3.1, Beispiele (z. B. der Whitney-Regenschirm), siehe [Ki] 3.2.2.

Definition des Kettenkomplexes $IC^{\overline{p}}$ und von $IH^{\overline{p}}$, [GM1] 1.3, [Ki] 3.4, Beispiele. Bemerke, dass man auch mit Koeffizienten in einem lokalen System arbeiten kann (das nur über $X \setminus X_{\mathrm{sing}}$ definiert sein muss).

Beispiel [Ki] 3.5.1.

Der Übergang zur Normalisierung, [GM1], §4, [Ki] 3.6.3. (Man kann die Konstruktion der Normalisierung für allgemeine topologische Mannigfaltigkeiten übergehen, aber der Begriff *normal* sollte jedenfalls diskutiert werden.)

2. Vortrag: Schnittkohomologie als Garbenkohomologie

Definition der Garben $IC^i_{\overline{p}}$, [GM2], 2.1. Diskutiere, dass die Hyperkohomologie dieses Komplexes tatsächlich die Gruppen $IH^{\overline{p}}$ berechnet, [GM2] 2.1, [Ki] 5.2, 5.3.

Bemerke, dass man auch mit Koeffizienten in einem lokalen System arbeiten kann (das nur über $X \setminus X_{\mathrm{sing}}$ definiert sein muss).

Lokale Berechnung der Schnittkohomologie, [Ki] 3.8, [GM2] 2.4.

Die Anklebe-Eigenschaft, [GM2], 2.5, sollte ausführlich erläutert werden, das Ergebnis von McCrory zitieren wir aber ohne Beweis.

3. Vortrag: Delignes Konstruktion von $IC_{\bar{p}}^{\bullet}$

Siehe [GM2] §3. Die Charakterisierungen [AX1] und [AX2] sollten behandelt werden (siehe loc. cit. 4.3, Lemma 1). Vgl. [A1] §2, insbes. Thm. 2.2.2.

Mit dieser Konstruktion kann man auf die Wahl einer Stratifizierung verzichten.

4. Vortrag: Verallgemeinerte Poincaré-Dualität

Mithilfe des vorhergehenden Vortrags ist der Beweis, dass Schnittkohomologie Poincaré-Dualität erfüllt, einfach: [GM2] 5.3, *simple proof*, oder [A1].

Konstruiere die cup-Produkt-Paarung, [GM2], 5.2. (Zu den technischen Grundlagen siehe [GM2] §1, [Bo] Ch. V §7.)

Beispiele

5. Vortrag: Perverse Garben

Wir beschränken uns (jedenfalls, wo es Erleichterungen bringt) auf den Fall von komplexen Varietäten und betrachten nur die mittlere Perversität.

Definiere die Kategorie der perversen Garben und diskutiere ihre Struktur, zum Beispiel nach [A1] 4.2, 4.3, insbes. Thm. 4.2.10, 4.3.2. Vergleiche auch [BBD], [KW]. Der technische Begriff der t-Struktur und des Verklebens von t-Strukturen muss diskutiert werden, die Beweise können aber gekürzt werden.

6. Vortrag: Der Zerlegungssatz

Diskutiere den Zerlegungssatz, siehe [BBD] 6.2.5, [A1] 4.4 und [Ki] 6.5, wo auch ein nettes Beispiel betrachtet wird.

7.+8. Vortrag: Die Springer-Korrespondenz

Wir richten uns nach [A1] §5. Siehe auch [KW] VI, [Sh], und die in diesen Quellen gegebenen Referenzen. Siehe auch [AGZT2].

Nach Möglichkeit sollten "Anwendungen" (Berechnung der Kohomologie von $\mathcal{N}$, Anzahl der unipotenten Elemente von $G(\mathbb{F}_q)$) angesprochen werden, außerdem die explizite Beschreibung im Fall der SL_n.

9., 10., 11. Vortrag

Zum Abschluss wollen wir eine weitere Anwendung der Theorie diskutieren. Möglichkeiten wären Lusztigs Charaktergarben [Lu], [La], die Resultate von Braden und MacPherson [BM] über die explizite Beschreibung der Schnittkohomologie gewisser Varietäten mit einer Toruswirkung, oder etwas Anderes — vielleicht hat ja einer der Teilnehmer einen Vorschlag!

Literatur

[AGZT1] U. Görtz, J. Heinloth, *Schnittkohomologie*, Programm für die Kleine Arbeitsgemeinschaft Algebraische Geometrie und Zahlentheorie, `http://www.math.uni-bonn.de/people/mad/ag/Schnittkohomologie/`

[AGZT2] J. Heinloth, E. Viehmann, *Die Springer-Korrespondenz*, Programm für die Kleine Arbeitsgemeinschaft Algebraische Geometrie und Zahlentheorie, `http://www.math.uni-bonn.de/people/mad/ag/Springer-Korrespondenz/`

[A1] A. Arabia, *Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer*, `http://www.math.jussieu.fr/~arabia/`

[A2] A. Arabia, *Introduction à l'homologie d'intersection*, `http://www.math.jussieu.fr/~arabia/`

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, in: Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque **100**, 1982.

[Bo] A. Borel et. al., *Intersection Cohomology*, Birkäuser Progress in Math. **50**, 1984, `SB 2083`.

[BM] T. Braden, R. MacPherson, *From moment graphs to intersection cohomology*, Math. Ann. **321** (2001), no. 3, 533–551.

[GM1] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection homology theory*, Topology **19** (1980), 135–162.

[GM2] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection Homology II*, Invent. Math. **72**, no. 1 (1983), 77-129.

[KW] R. Kiehl, R. Weissauer, *Weil conjectures, perverse sheaves and ℓ-adic Fourier transform*, Springer Erg. Math. **42**, 2001.

[Ki] F. Kirwan, *Introduction to intersection homology theory*, Pitman Research Notes in Math., Longman 1988.

[HTT] R. Hotta, K. Takeuchi, T. Tanisaki, *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*, Birkhäuser Progress in Math. **236** 2007

[Lu] G. Lusztig, *Introduction to character sheaves*, in: Proc. Symp. Pure Math. **47** (1987), 165–179, `SB 58`.

[La] G. Laumon, *Faisceaux caractères [d'après Lusztig]*, Sém. Bourbaki, Exp. **709**, in Astérisque 177-178 (1989), 231–260.

[Ri] K. Rietsch, *An introduction to perverse sheaves*, `arXiv:math/0307349v1`

[Sh] T. Shoji, *Geometry of orbits and Springer correspondence*, Astérisque **165** (1988), 61–140.