LÖSUNGEN SUM OF US 2024

1 Ein Wettbewerb im Pfahlsitzen [60 Punkte]

Aufgabe 1. [10 Punkte]

Der höchste Gewinn kann erreicht werden, indem man bereit ist, länger als die Gegenspielerin auf dem Pfahl zu sitzen, weil man dabei 4 Punkte gewinnt, und sonst der Preis verteilt wird und man nur 2 Punkte gewinnt.

Um so wenig Minuspunkte wie möglich zu bekommen, muss die Gegenspielerin die kürzeste Sitzdauer gewählt haben, also nur eine Stunde. Dadurch bekommt man nur einen Punkt Abzug.

Der höchstmögliche Gewinn ist also $4 - 1 = 3$ Punkte.

Aufgabe 2. [10 Punkte]

Der höchste Verlust, den Elise bekommen kann, entsteht, wenn sie zwar lange sitzen muss, aber trotzdem keinen Preis bekommt. Das heißt also, Elise muss selbst 2 Stunden auf dem Pfahl sitzen, die Gegenspielerin Anne muss aber 3 Stunden gewählt haben. Dann bekommt Elise einen Gewinn von -2, also einen Verlust von 2.

Aufgabe 3. [20 Punkte]

Wir bezeichnen die Zeilen und Spalten mit der Anzahl an Stunden, die jede Spielerin gewählt hat.

Wenn Anne und Elise beide eine Stunde zu sitzen wählen, teilen sie den Preis und bekommen beide einen Minuspunkt. Insgesamt bekommen also beide einen Gewinn von 1.

Wenn Anne 2 oder 3 Stunden wählt und Elise immer noch eine Stunde wählt, dann bekommt Anne 4 Punkte, und beide Spielerinnen einen Abzug von einem Punkt (für die Stunde, die Elise gewählt hat). Insgesamt bekommt Anne 3 Punkte und Elise bekommt aber -1 Punkte.

Somit haben wir alle Einträge der ersten Spalte (erste Aktion von Elise) der Bimatrix berechnet. Analog können die restlichen Einträge berechnet werden und wir erhalten folgende Bimatrix:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1;1 & -1;3 & -1;3 \\ 3;-1 & 0;0 & -2;2 \\ 3;-1 & 2;-2 & -1;-1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Aufgabe 4. [20 Punkte]

Wenn Anne und Elise die gleiche Anzahl an Stunden wählen, dann zahlen Fleur und Marleen gleich viel Geld in den Topf, und danach teilen Sie das gesamte Geld. Also bekommt jede von ihnen ihr Geld zurück und macht keinen Gewinn.

Wenn Anne eine Stunde wählt und Elise zwei oder drei Stunden, dann zahlt Fleur kein Geld in den Topf. Da Elise den Preis gewinnt, bekommt Fleur auch kein Geld am Ende des Spiels, und Marleen bekommt ihr Geld zurück. Also machen auch in dieser Situation weder Fleur noch Marlene einen Gewinn. Ganz analog sieht man, dass beide keinen Gewinn machen, wenn Elise eine Stunde wählt und Anne zwei oder drei Stunden.

Es bleiben nur die Fälle, in denen eine Spielerin 5 Euro und die andere Spielerin 10 Euro einzahlen. Die Spielerin mit dem höheren Einsatz (10 Euro) bekommt am Ende das gesamte Geld (15 Euro) und gewinnt daher 5 Euro. Die andere Spielerin erleidet entsprechend einen Verlust von 5 Euro.

Da Fleur die erste Spielerin, also die Zeilenspielerin ist, sieht die Matrix für Fleurs Gewinn folgenderweise aus (wobei die Zeilen und Spalten nach dem Geldeinsatz bezeichnet werden):

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 5 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 10 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

2 Remen und Joep spielen Floorball [60 Punkte]

Aufgabe 5. [10 Punkte]

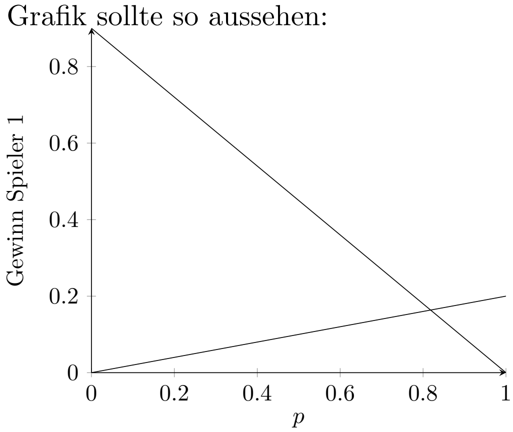
Die Matrix gibt die Gewinne für Joep (der Torwart). Dafür gibt es folgende Gründe:

- Die Gewinne für Joep sind Wahrscheinlichkeiten, also immer großer oder gleich 0. Diese Wahrscheinlichkeiten sind auch die Verluste für Remen, also minus die Gewinne für Remen. Die Gewinne für Remen sind daher immer kleiner oder gleich 0. Da die Matrix einige positive Werte hat, können diese nur Gewinne für Joep sein.

- Alternativ merkt man, dass die Werte höher sind, wenn beide Spieler dieselbe Seite wählen. In dieser Situation kann der Ball abgewehrt werden, was vorteilhaft für den Torwart ist. Ferner ist der Wert höher, wenn beide Spieler die rechte Seite auswählen, und laut der Aufgabenstellung kann Joep diese Seite besser verteidigen als die linke Seite. Also sollte Joeps Gewinn bei „beide rechts“ größer sein als bei „beide links“.

Aufgabe 6. [20 Punkte]

Die Grafik sollte so aussehen:



Die zwei möglichen Aktionen von Remen sind die Spalten $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$. Der erwartete Gewinn von Joep ist im Allgemeinen bei einer Spalte $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ durch $p \cdot a + (1-p) \cdot b$ gegeben. Daraus folgen die beiden Linien in der Grafik, nämlich:

- wenn Remen nach links schießt, ist der erwartete Gewinn von Joep $\frac{p}{5}$, und
- wenn Remen nach rechts schießt, ist der erwartete Gewinn von Joep $(1-p)\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{10} - \frac{9}{10}p$.

Aufgabe 7. [15 Punkte]

Die Maximin-Strategie für Joep ist $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$, wobei p das Minimum von $p/5$ und $(1-p)\cdot\frac{9}{10}$ maximiert. Das heißt, der kleinste y-Wert von den beiden Linien in der Grafik von Aufgabe 6 soll so hoch wie möglich sein. Dies geschieht beim Schnittpunkt der beiden Geraden, also für das p, das

$$\frac{p}{5} = \frac{9}{10} - \frac{9}{10}p$$

erfüllt. Die Lösung der Gleichung ist $p = \frac{9}{11}$, und die Maximin-Strategie für Joep ist dann $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8. [15 Punkte]

Dieses Spiel ist ein Nullsummenspiel, denn die Gewinne für Joep sind die Verluste von Remen.

Deshalb ist der erwartete Verlust von Remen (also der erwartete Gewinn von Joep) bei der Minimax-Strategie von Remen *unabhängig* von der Strategie von Joep.

Schreibe nun die Minimax-Strategie von Remen als $\begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix}$. Die Strategie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ von Joep gibt einen Erwartungsgewinn von $\frac{q}{5}$. Und die Strategie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ von Joep gibt einen Erwartungsgewinn von $(1-q)\cdot\frac{9}{10}$. Bei der Minimax-Strategie von Remen sollen beide Werte gleich sein, also q soll die Gleichung

$$\frac{q}{5} = (1-q)\cdot\frac{9}{10}$$

erfüllen. Die Lösung ist $q = \frac{9}{11}$, und somit ist die Minimax-Strategie von Remen $\begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$.

Alternativ könnte man zuerst den Wert des Spiels mit der Maximin-Strategie von Joep aus Aufgaben 6 und 7 berechnen. Dieser Wert wird dann für $p = \frac{9}{11}$ erreicht, was also den Wert $\frac{9/11}{5} = \frac{9}{55}$ gibt (man kann auch den Erwartungswert mit der anderen Aktion von Remen als

$$(1-p)\cdot\frac{9}{10} = \left(1 - \frac{9}{11}\right)\cdot\frac{9}{10} = \frac{2}{11}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{55}$$

berechnen, was natürlich das gleiche Ergebnis gibt). Da dieser Wert gleich dem Erwartungswert bei der Minimax-Strategie von Remen und *jeder* Strategie von Joep sein soll, muss q zum Beispiel die Gleichung $\frac{q}{5} = \frac{9}{55}$ erfüllen (also der Erwartungswert bei der ersten Aktion von Joep). Die Lösung der Gleichung ist $q = \frac{9}{11}$, wie mit dem ersten Lösungsweg. Man könnte auch die zweite Aktion von Joep nehmen und 1 mit der Gleichung $\frac{9}{10}\cdot(1-q) = \frac{9}{55}$ bestimmen.

3 Die Noten von Daan und Kees [115 Punkte]

Aufgabe 9. [15 Punkte]

Die zweite Spalte wird strikt dominiert durch die erste. Nach Entfernen hiervon sind die zweite und dritte Zeile strikt dominiert durch die erste und danach ist die neue zweite

Spalte strikt dominiert durch die erste. Nach Entfernen dieser Zeilen und Spalten bleibt nur noch der Wert 4 übrig.

Aufgabe 10. [30 Punkte]

Keine einzige Zeile oder Spalte ist strikt dominiert. Wenn wir jede Zeile mit den anderen Zeilen vergleichen, aber auch jede Spalte mit allen andern Spalten sehen wir, dass keine einzige Zeile oder Spalte strikt dominiert wird. Deshalb behalten wir die gesamte Matrix.

Alle Zeilen haben einen Wert, der der höchste seiner Spalte ist, dadurch können sie nicht strikt dominiert werden. Die zweite und dritte Spalte haben einen Wert, der der niedrigste ihrer jeweiligen Zeile ist und können deshalb nicht strikt dominiert werden. Eine Strategie $\begin{pmatrix} 0 & p & q \end{pmatrix}$, die die erste Spalte strikt dominiert, muss $2p + 8q < 4$ und $8p + q < 3$ erfüllen. ($3p + 5q < 5$ gilt automatisch, wenn $q < 1$.) Wir können benutzen, dass $q = 1 - p$, um dies umzuschreiben zu $p > \frac{2}{3}$ und $p < \frac{2}{7}$. Das kann natürlich nicht gleichzeitig wahr sein, also ist auch die erste Spalte nicht strikt dominiert. Die Matrix, die wir suchen, ist also die Ausgangsmatrix.

Aufgabe 11. [20 Punkte]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Spieler 1 spielt immer Zeile 4, weil diese immer den höchsten Gewinn gibt. Die Matrix, die übrig bleibt ist $\begin{pmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$

Weil Spieler 2 das weiß, will Spieler 2 jetzt so niedrig wie möglich spielen. Spieler 2 spielt jetzt Spalte 4. Deshalb werden insgesamt 3 strikt dominierte Zeilen und 3 strikt dominierte Spalten entfernt. Es gibt also 6 strikt dominierte Aktionen und Spieler 1 spielt Zeile 4 mit Wahrscheinlichkeit 1 als dominante Strategie und Spieler 2 spielt Spalte 4 mit Wahrscheinlichkeit 1 als dominante Strategie.

Aufgabe 12. [20 Punkte]

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Wir stellen fest: Für Spieler 1 ist Zeile 1 immer besser als Zeile 2. Deshalb ist Zeile 2 strikt dominiert und wir können sie aus der Matrix entfernen. Wenn wir die übrig gebliebenen Zeilen vergleichen, sehen wir, dass keine Zeile besser ist als eine andere Zeile. Auch wenn wir die Spalten vergleichen, ist keine besser als eine der anderen. Also ist Zeile 2 die einzige strikt dominierte Zeile. Spieler 1 und 2 haben keine dominanten Aktionen, weil es keine Zeile oder Spalte gibt, die immer den höchsten (Spieler 1)/niedrigsten (Spieler 2) Gewinn gibt.

Aufgabe 13. [30 Punkte]

Eine Strategie, die die erste Zeile strikt dominiert, muss in jeder Spalte einen höheren Erwartungswert haben als der Wert in der ersten Zeile. Dadurch ergibt sich für die erste, zweite, dritte und vierte Spalte:

$$\begin{aligned} 10q + 8r + 9s &> 9; \\ 3q + 3r + 5s &> 4; \\ 3q &> 1; \\ 2q + 10r + 2s &> 3. \end{aligned}$$

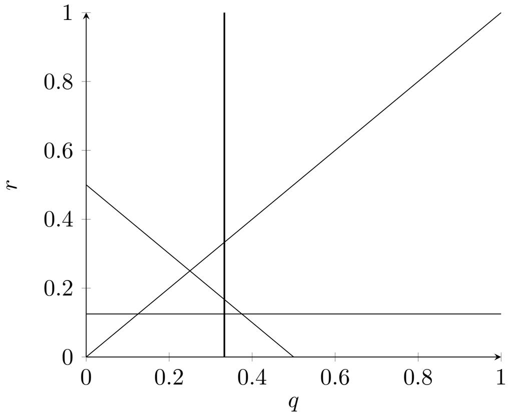
Wir substituieren $s = 1 - q - r$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} q - r &> 0; \\ -2q - 2r &> -1; \\ 3q &> 1; \\ 8r &> 1. \end{aligned}$$

Oder auch

$$\begin{aligned} q &> r; \\ q + r &< 1/2; \\ q &> 1/3; \\ r &> 1/8. \end{aligned}$$

Die Linien, die durch die zugehörigen Gleichungen definiert sind, stehen in folgendem Diagramm:



Wir sehen, dass das gesuchte Vieleck das kleinste Dreieck in diesem Diagramm ist. Die Eckpunkte sind (q_1, r_1), (q_2, r_2) und (q_3, r_3), definiert durch

$$\begin{aligned} q_1 &= 1/3; \\ r_1 &= 1/8; \\ q_2 &= 1/3; \\ q_2 + r_2 &= 1/2; \\ q_3 + r_3 &= 1/2; \\ r_3 &= 1/8. \end{aligned}$$

Das gibt die Eckpunkte

$$\begin{aligned} (q_1, r_1) &= (1/3, 1/8); \\ (q_2, r_2) &= (1/3, 1/6); \\ (q_3, r_3) &= (3/8, 1/8). \end{aligned}$$

4 Sommeraktivitäten [110 Punkte]

Aufgabe 14. [20 Punkte]

Die Regeln fürs nebeneinander Sitzen sind genau so, dass Paare von Kindern nebeneinander sitzen, die reine Nash-Gleichgewichte ergeben.

In der unten stehenden Matrix sind alle Zahlen mit höchstem Zeilenwert für Spieler 2 oder Spaltenwert für Spieler 1 unterstrichen.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccc} \text{Amy} & \text{Hans} & \text{Julia} & \text{Margot} & \text{Thijme} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Guillermo} \\ \text{Isra} \\ \text{Quinten} \\ \text{Simon} \\ \text{Veerle} \end{array} & \begin{pmatrix} 1;\ 2 & 4;\ \underline{5} & 2;\ 2 & 3;\ 1 & 2;\ 4 \\ 1;\ 3 & \underline{5};\ 3 & 1;\ \underline{4} & 2;\ 1 & \underline{3};\ \underline{4} \\ \underline{4};\ \underline{5} & 3;\ 2 & \underline{5};\ 1 & 1;\ 4 & \underline{3};\ 1 \\ 2;\ 4 & 1;\ \underline{5} & \underline{5};\ \underline{5} & \underline{5};\ 3 & 2;\ \underline{5} \\ 1;\ \underline{5} & 1;\ 3 & \underline{5};\ 4 & 2;\ 3 & \underline{3};\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alle Stellen in dieser Matrix, bei denen beide Zahlen unterstrichen sind, sind ein reines Nash-Gleichgewicht. In diesem Fall sind das drei: (Quinten, Amy), (Simon, Julia) und (Isra, Thijme).

Aufgabe 15. [15 Punkte]

Wir suchen jetzt reine Nash-Gleichgewichte. Zuerst stellen wir fest, dass wir bei Unterstreichen aller Zahlen mit höchstem Zeilenwert für Spieler 2 oder Spaltenwert für Spieler 1 mit folgender Matrix enden: $\begin{pmatrix} \underline{2}, \underline{4} & 0, 1 \\ 1, 1 & \underline{3}, \underline{6} \end{pmatrix}$. Daraus folgt, dass die beiden reinen Nash-Gleichgewichte $\begin{pmatrix}\text{Strand} & \text{Eis}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\text{Shoppen} & \text{Kuchen}\end{pmatrix}$ sind.

Aufgabe 16. [20 Punkte]

Jetzt suchen wir gemischte Nash-Gleichgewichte: die reinen Nash-Gleichgewichte sind ausgeschlossen durch die Absprache, dass sie keine Wahrscheinlichkeit von 0 oder 1 wählen; ausgeschlossen sind auch Gleichgewichte, in denen eine Spielerin eine reine Strategie als beste Reaktion wählt.

Um die Strategien auszurechnen, teilen wir die Matrix in zwei Matrizen auf: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ für Isra und $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ für Julia.

Wenn Julias Strategie $\begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix}$ gegeben ist, dann erwartet Isra gleich viel Spaß am Strand und beim Shoppen, wenn $2q = 1q + 3(1-q)$, oder auch $q = \frac{3}{4}$. Bei diesem Wert für q ist der erwartete Spaß für Isra also immer gleich, unabhängig von ihrer eigenen Strategie. (Dies schließt eine reine Strategie als beste Reaktion aus.)

Wenn Isras Strategie $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ gegeben ist, dann erwartet Julia gleich viel Spaß beim Eis oder Kuchen essen, wenn $4p + 1(1-p) = 1p + 6(1-p)$, oder auch $p = \frac{5}{8}$. Bei diesem Wert von p ist der erwartete Spaß von Julia also immer gleich, unabhängig von ihrer eigenen Strategie.

Bei dieser Kombination von Wahrscheinlichkeiten können sowohl Julia als auch Isra also nicht mehr Freude erwarten, wenn sie ihre eigenen Strategien verändern. Also wählt Julia bei dieser Strategie mit Wahrscheinlichkeit $q = 3/4$ das Eis und Isra mit Wahrscheinlichkeit $p = 5/8$ den Strand.

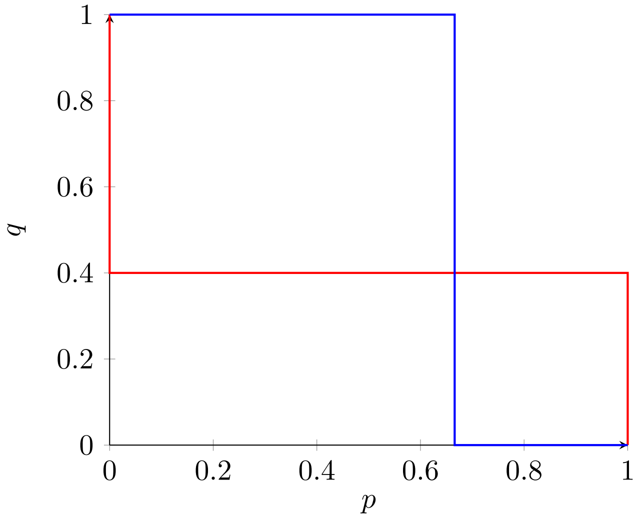
Aufgabe 17. [25 Punkte]

Um die beste Reaktion zu bestimmen, lösen wir die folgenden Gleichungen:

Spieler 1 spielt $p = 1$ wenn $3q+4(1-q) \geq 6q+2(1-q) \xrightarrow{\text{lösen}} q \leq \frac{2}{5}$. Genauso ist $p = 0$ die beste Reaktion wenn $q \geq \frac{2}{5}$. Und jedes p gibt die beste Reaktion wenn $q = \frac{2}{5}$.

Spieler 2 spielt $q = 1$ wenn $2p + 3(1-p) \geq 3p + (1-p) \xrightarrow{\text{lösen}} p \leq \frac{2}{3}$; spielt $q = 0$ wenn $p \geq \frac{2}{3}$; und jedes q wenn $p = \frac{2}{3}$.

Wenn das in einem Koordinatensystem gezeichnet wird, sieht das wie folgt aus:



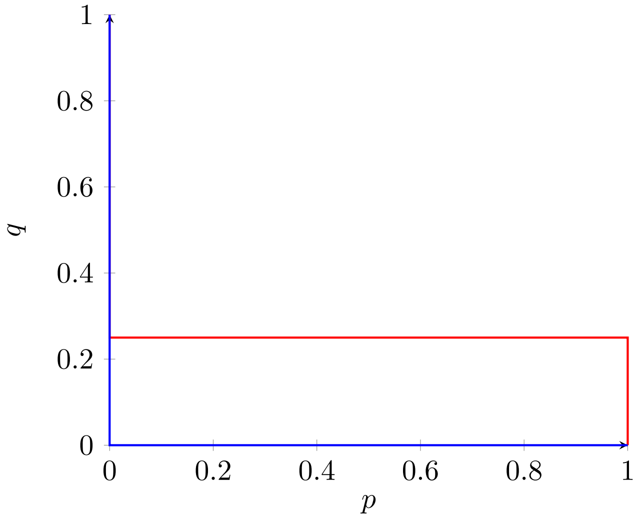
Aufgabe 18. [30 Punkte]

Es liegen nur reine Nash-Gleichgewichte bei $(6, 3)$ und $(4, 3)$.

Um gemischte Nash-Gleichgewichte zu bestimmen, lösen wir die folgenden Gleichungen, um die besten Reaktionen zu finden:

- Spieler 1 spielt $p = 1$ wenn $3q + 4(1-q) \geq 6q + 3(1-q) \xrightarrow{\text{lösen}} q \leq \frac{1}{4}$
- Spieler 2 spielt $q = 1$ wenn $2p + 3(1-p) \geq 3p + 3(1-p) \xrightarrow{\text{lösen}} p \leq 0$

Wenn das in ein Koordinatensystem gezeichnet wird, sieht das wie folgt aus:



Abgesehen von den reinen Nash-Gleichgewichten gibt es auch ein Nash-Gleichgewicht für $p = 0$ mit $\frac{1}{4} \leq q \leq 1$. Weil es unendlich viele Zahlen zwischen $\frac{1}{4}$ und 1 gibt, gibt es unendlich viele Nash-Gleichgewichte.

5 Carolijn und Renske im Urlaub [30 Punkte]

Aufgabe 19. [10 Punkte]

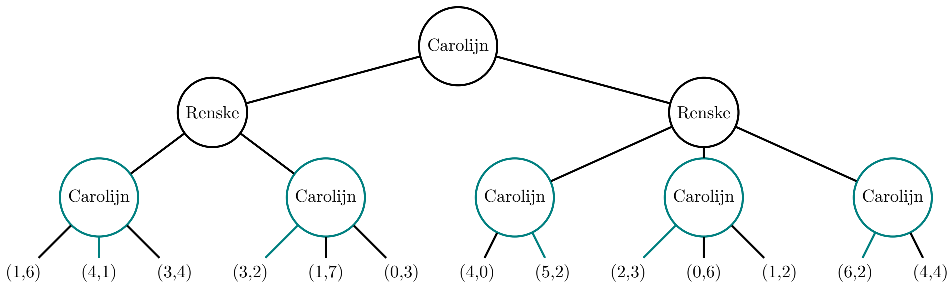
Text A) gehört zum Aktivurlaub, weil das der einzige mit vier verschiedenen Preisen ist.

In Text B) ist in einem der Länder der Preis unabhängig vom Typ der Unterkunft, das könnte sowohl zum Baum des Strandurlaubs als auch zu dem des Kultururlaubs passen.

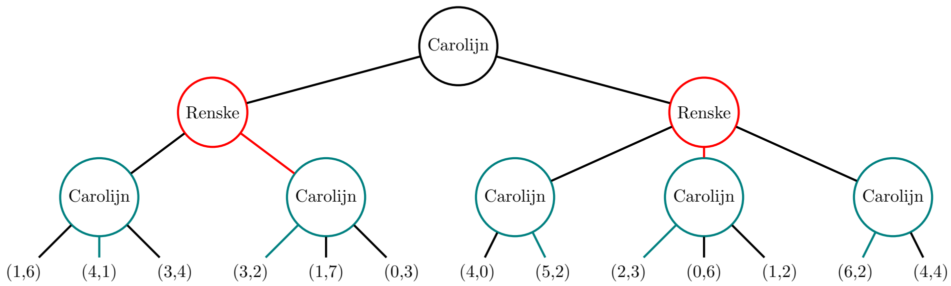
Aber bei Text C) ist in einem der Länder nur eine Art der Unterkunft, das b-n-b, das genauso teuer ist wie das b-n-b im anderen Land. Das passt ausschließlich zum Baum des Strandurlaubs. Also gehört Text B) zum Kultururlaub.

Aufgabe 20. [20 Punkte]

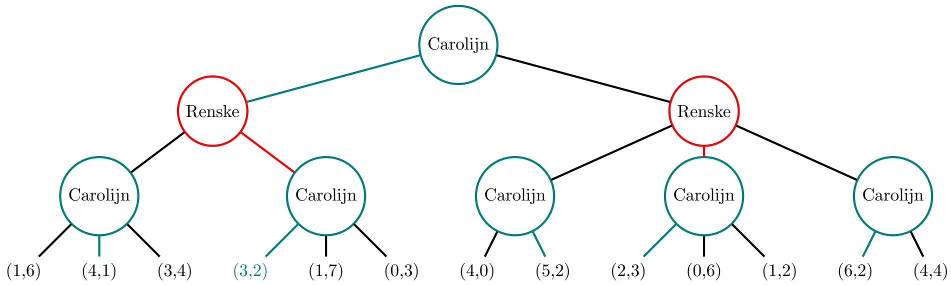
Mit rückwärtsgerichteter Induktion fangen wir unten an und schauen, welcher Kreis obendrüber die beste Option für Carolijn ist. Diesen haben wir im Baum hierunter blau gefärbt:



Jetzt schauen wir nach den Kreisen darüber. Das sind die Möglichkeiten von Renske. Renske weiß, dass Carolijn der blauen Linie folgen wird. Dadurch muss sie nur 2 Optionen links und 3 rechts jeweils miteinander vergleichen. An der linken Seite des Baumes kann sie 2 Punkte bekommen, also mehr als 1, und sie wählt den rechten Pfad. An der rechten Seite des Baumes kann sie 3 bekommen, also mehr als 2, und sie wählt die Mitte.



Als letzte wählt wieder Carolijn. Sie weiß, dass sie 3 bekommt, wenn sie links wählt und 2, wenn sie rechts wählt. Deshalb wählt sie die linke Seite, und die Werte sind 3 für Carolijn und 2 für Renske.

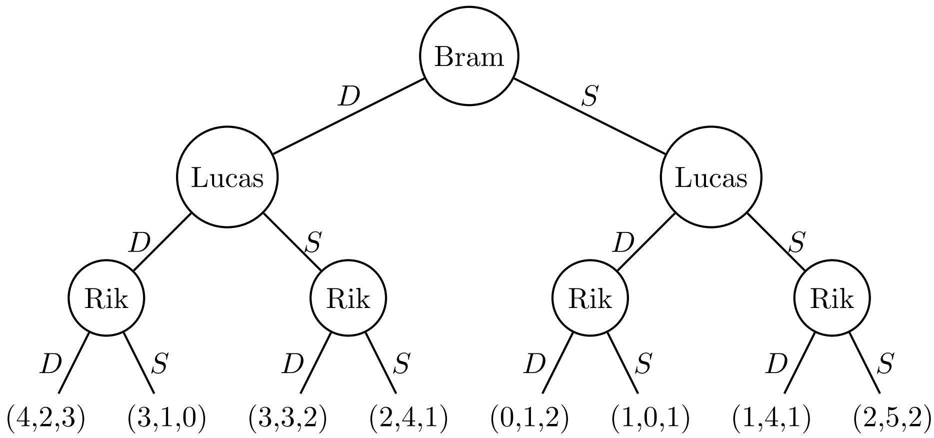


Die richtige Antwort ist also Dinant (in Belgien).

6 Im Kino [45 Punkte]

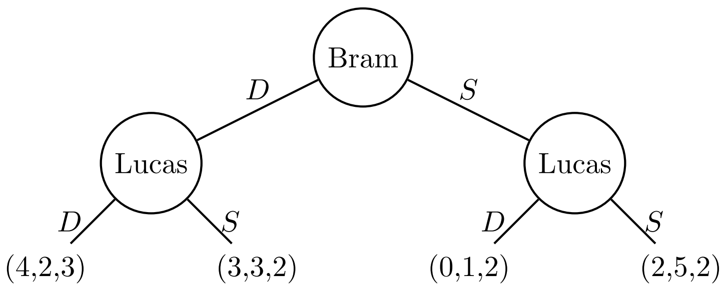
Aufgabe 21. [30 Punkte]

Die extensive Form folgt direkt aus der Aufgabe und sieht wie folgt aus:

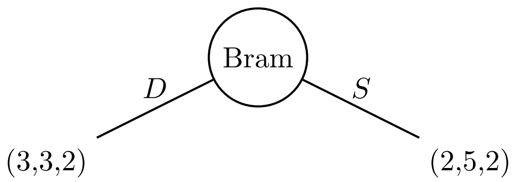


Aufgabe 22. [15 Punkte]

Indem wir jeden Kreis, in dem Rik eine Entscheidung trifft, austauschen durch das Ergebnis seiner Wahl, erhalten wir den folgenden Baum:



Wenn wir dasselbe noch einmal für Lucas machen erhalten wir:



Bram würde jetzt das Ergebnis $(3, 3, 2)$ wählen, also ist das das Ergebnis des Gleichgewichts der rückwärtsgerichteten Induktion. Bram und Rik schauen Deadpool und Lucas schaut Spiderman.

7 Der Cournot [80 Punkte]

Aufgabe 23. [20 Punkte]

Wir wissen, dass der Gewinn von Big Coin gleich $x \cdot (1200 - x - y)$ oder $1200x - x^2 - xy$ ist. Wenn wir y als Konstante betrachten und nach x ableiten, bekommen wir $1200 - 2x - y$. (Nicht alle Schüler*innen können differenzieren, aber sie können den Höhepunkt der Parabel auch mithilfe anderer Methoden finden; siehe unten.) Beim maximalen Gewinn ist die Ableitung gleich 0, also gilt $y = 1200 - 2x$.

Eine andere Lösungsmöglichkeit ohne zu differenzieren: Bestimme den Höhepunkt der Parabel $x \cdot (1200 - x - y)$ oder $1200x - x^2 - xy$. Wen wir annehmen, dass y eine Konstante ist, dann ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 1200x - xy$ und hieraus können wir den Höhepunkt mit $x_{top} = \frac{-1200+y}{-2} = 600 + \frac{y}{-2}$ berechnen. Wir können auch feststellen, dass die Parabel $x \cdot (1200 - x - y)$ gleich 0 ist bei $x = 0$ und $x = 1200 - y$. Also liegt der Höhepunkt mitten zwischen diesen x-Werten. Wir stellen nach y um, sodass wir dies wieder in die Ausgangsgleichung substituieren können. Das gibt dann $y = 1200 - 2x$.

Aufgabe 24. [20 Punkte]

Mit einem analogen Argument wie in der Lösung von Aufgabe 23 gilt im Nash-Gleichgewicht auch, dass $x = 1200 - 2y$. Beim Einsetzen der ersten in die zweite Formel ergibt sich $x = 1200 - 2 \cdot (1200 - 2x)$ oder $x = -1200 + 4x$. Das gibt dann $3x = 1200$ oder $x = 400$. Aus einem analogen Argument folgt dann wieder $y = 400$.

Aufgabe 25. [20 Punkte]

Wir schauen erst nach den Aktionen von Dog Coin, nachdem Big Coin x festgelegt hat. Der Gewinn von Dog Coin ist dann wieder $y \cdot (1200 - x - y)$. Ableiten gibt $1200 - x - 2y$ und das setzen wir gleich 0, was $y = \frac{1200-x}{2}$ gibt. Big Coin weiß das jetzt schon vorher und erwartet also einen Gewinn von $x \cdot (1200 - x - \frac{1200-x}{2})$, oder $600x - \frac{x^2}{2}$.

Aufgabe 26. [20 Punkte]

Die Ableitung des Gewinns von Big Coin ist $600 - x$. Das mit 0 gleichzusetzen gibt den maximalen Gewinn, also ist dieser bei $x = 600$. (Wir können das Maximum der Parabel auch auf andere Art finden.) Einsetzen in die Formel für y gibt $y = 300$.