

Matheturnier 2023



„Sum of Us“-Wettbewerb

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer des internationalen Mathematikturniers 2023,

in Kürze startet der erste Teil des Wettbewerbs. Bitte lest euch zunächst die folgenden Hinweise aufmerksam durch und blättert erst um, sobald das Startsignal erfolgt.

Hinweise

- Die Aufgaben wurden von Frodo Moonen und Jelle Vandersnickt, Studierende der Mathematik an der KU Leuven unter Betreuung von Niels Bonneux und Joeri van der Veken, erstellt.
- In der Bearbeitungszeit von 90 Minuten können maximal 500 Punkte erzielt werden.
- Als Hilfsmittel sind Zirkel und Lineal, ein nicht-grafikfähiger Taschenrechner, das Vorbereitungsmaterial sowie eigene Anmerkungen zum Vorbereitungsmaterial zulässig.
- Rundet eure Endergebnisse immer auf zwei Nachkommastellen.
- Bei Aufgabenstellungen, bei denen es nur zwei Antwortmöglichkeiten gibt oder die richtige Lösung eingekreist werden soll, werden wie folgt bewertet: Wenn für eine Aufgabe x Punkte vergeben werden, gibt es diese bei einer richtigen Antwort. Bei einer falschen Antwort werden x Punkte abgezogen. Wird die Frage nicht beantwortet, wird diese mit 0 Punkten bewertet.
- Rechenwege und Nebenrechnungen können auf zusätzlichem Papier notiert werden, müssen aber nicht abgegeben werden. Es werden nur die Ergebnisse gewertet, die auf dem ausgeteilten Antwortbogen notiert wurden.
- Es empfiehlt sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben zu gewinnen, um diese anschließend im Team gemeinsam aufzuteilen.
- Bitte notiert im folgenden Kasten **und auf allen Seiten des Antwortbogens** die euch zugewiesene **Tischnummer**:
- Obwohl die Aufgaben nach US-Bundesstaaten benannt sind, sind die Fragestellungen frei erfunden und entsprechen keiner exakten Darstellung der politischen Situation.

Wir wünschen euch viel Erfolg und Spaß bei der Bearbeitung des Wettbewerbs!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
erreichbare Punktzahl	100	80	120	120	80	500
Korrektur 1						
Korrektur 2						
erreichte Punktzahl						

1 Florida [100 Punkte]

Im *Sunshine State* ist die Auszählung der Stimmen nach einer Wahl oft ziemlich schwierig. Auch dieses Mal ging alles schief...

Frage 1. [20 Punkte] In der folgenden Präferenztable ist eine ganze Spalte verloren gegangen. Wir wissen jedoch, dass Kandidat*in B nach der Mehrheitsmethode nicht gewinnt, aber nach der Borda-Methode vor Kandidat*in A liegt. Außerdem gab es weniger als 350 Wähler*innen.

	122	58	*	47
1. Wahl	A	C	*	B
2. Wahl	B	A	*	A
3. Wahl	C	B	*	C

Gebt alle möglichen Werte für die Zahl oben in der fehlenden Spalte an.

Frage 2. [40 Punkte] In der folgenden Präferenztable sind an einigen Stellen Daten verloren gegangen. Bitte vervollständigt die Tabelle korrekt anhand der folgenden Informationen.

- Kandidat*in D gewinnt nach dem Mehrheitsprinzip.
- Kandidat*in D gewinnt alle Duelle gegen alle anderen Kandidat*innen. Alle anderen Kandidat*innen gewinnen genau ein Duell gegen eine*einen andere*n Kandidat*in.
- Kandidat*in A erhält nach der Borda-Methode 1124 Punkte.
- Insgesamt gibt es 500 Wähler*innen.

	74	*	42	21	103	24	*	81
1. Wahl	A	A	B	B	C	C	D	D
2. Wahl	B	D	*	C	*	A	*	B
3. Wahl	*	C	C	D	B	D	*	A
4. Wahl	*	B	*	A	A	B	A	*

Frage 3. [40 Punkte] In der folgenden Präferenztablelle haben sich fünf Fehler eingeschlichen, in jeder Zeile einer (einschließlich der ersten Zahlenreihe). Findet die Fehler und korrigiert diese. Ihr wisst, dass Kandidat*in B nach der Mehrheitsmethode gewinnt und dass die Kandidat*innen nach der Borda-Methode die folgenden Werte erhalten:

- Kandidat*in A erhält 6359 Punkte,
- Kandidat*in B erhält 6592 Punkte,
- Kandidat*in C erhält 4567 Punkte,
- Kandidat*in D erhält 2712 Punkte.

	731	94	687	202	178	76
1. Wahl	A	A	D	B	C	D
2. Wahl	B	C	A	C	C	B
3. Wahl	A	D	C	D	B	A
4. Wahl	D	B	B	A	D	C

2 Wyoming [80 Punkte]

Wyoming ist mit knapp über 500 000 Einwohner*innen der US-Bundesstaat mit der geringsten Bevölkerungszahl. Etwa die Hälfte der Einwohner*innen ist wahlberechtigt, und es wird mit einem neuen Wahlsystem experimentiert.

Die **Integrierte Stichwahl** läuft folgendermaßen ab: Jede*r Wähler*in gibt eine vollständige Rangliste ihrer*seiner Kandidat*innen ab. Die*der Kandidat*in, die*der am seltensten an erster Stelle steht, wird aus allen Ranglisten gestrichen und die übrigen Kandidat*innen rücken nach. Wenn mehrere Kandidat*innen gleich selten an erster Stelle stehen, werden sie alle gleichzeitig gestrichen. (Beachtet, dass in der Präferenztablelle nun zuvor verschiedene Spalten möglicherweise plötzlich die gleiche Rangfolge enthalten). Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis keine Kandidat*innen mehr übrig sind. In den Wahlergebnissen werden die Kandidat*innen in umgekehrter Reihenfolge des Ausscheidens gereiht.

Frage 1. [80 Punkte] Betrachtet die folgende Präferenztablelle.

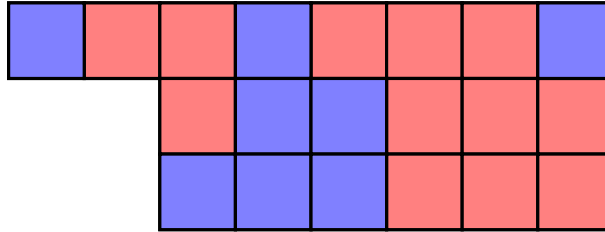
	90 000	25 000	50 000	85 000
1. Wahl	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
2. Wahl	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
3. Wahl	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>A</i>

Ermittelt den Wahlausgang nach

- (a) dem Mehrheitsverfahren,
- (b) dem paarweisen Mehrheitsverfahren,
- (c) dem Borda-Verfahren,
- (d) der Integrierten Stichwahl.

3 Oklahoma [120 Punkte]

Der Bundesstaat Oklahoma hat etwa 4 Millionen Einwohner*innen, von denen die Hälfte zur Wahl geht. Die folgende Zeichnung ist eine Annäherung an die Form des Staates, und jedes Kästchen steht für 100 000 Wähler*innen. Die Farbe eines Kästchens zeigt an, ob sie für die Demokraten (blau) oder die Republikaner (rot) stimmen. Der Staat soll in 5 Bezirke mit je 400 000 Wähler*innen unterteilt werden.



Bei den nächsten beiden Fragen gehen wir davon aus, dass die blaue Partei einen Bezirk gewinnt, wenn sie mindestens die Hälfte der Stimmen in diesem Bezirk erhält.

Frage 1. [5 Punkte] Wie viele Bezirke kann die blaue Partei theoretisch maximal gewinnen? Dabei müsst ihr keine geographischen Einschränkungen berücksichtigen.

Frage 2. [15 Punkte] Wenn jeder Bezirk aus (über horizontale oder vertikale Kanten verbundene) zusammenhängenden Quadraten bestehen muss, wie viele Bezirke kann die blaue Partei dann höchstens gewinnen?

Bei den nächsten drei Fragen gehen wir davon aus, dass die rote Partei einen Bezirk gewinnt, sobald sie mindestens die Hälfte der Stimmen in diesem Bezirk erhält.

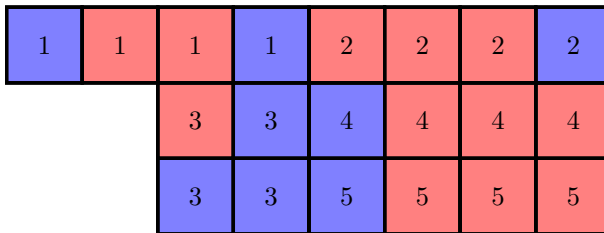
Frage 3. [5 Punkte] Wie viele Bezirke kann die rote Partei theoretisch maximal gewinnen? Geographische Einschränkungen müssen dabei nicht berücksichtigt werden.

Frage 4. [15 Punkte] Wenn jeder Bezirk aus (über horizontale oder vertikale Kanten verbundene) zusammenhängenden Quadraten bestehen muss, wie viele Bezirke kann die rote Partei dann höchstens gewinnen?

Frage 5. [20 Punkte] Indem sie an einem bestimmten Ort im Bundesstaat Wahlkampf macht, kann die rote Partei dafür sorgen, dass ein blaues Kästchen rot wird. Wenn sie dafür den Ort richtig wählt, kann anschließend eine Bezirkseinteilung gefunden werden, bei der jeder Bezirk aus (über horizontale oder vertikale Kanten verbundenen) zusammenhängenden Quadraten besteht und so die rote Partei *alle* Bezirke gewinnt. Zeichnet eine solche Bezirkseinteilung auf den Antwortbogen und kreuzt das blaue Kästchen an, das zu diesem Zweck die Farbe wechseln soll.

Frage 6. [10 Punkte] Bestimmt den Konvexitätskoeffizienten des vollständigen Bundesstaates, bei dem wir jedes Quadrat durch seinen Mittelpunkt darstellen. Dabei wird angenommen, dass eine Strecke, die den Rand der Figur berührt, noch in der Figur liegt. Gebt eure Antwort als vollständig gekürzten Bruch an.

Frage 7. [10 Punkte] Die folgende Abbildung zeigt eine Bezirkseinteilung: Kästchen mit der gleichen Nummer bilden einen Bezirk. Diese Einteilung hat die Eigenschaft, dass jeder Bezirk konvex ist. Wie viele Bezirkseinteilungen mit dieser Eigenschaft gibt es?



Für die letzten Fragen verwenden wir die Bezirksaufteilung der obigen Abbildung und gehen erneut davon aus, dass die blaue Partei einen Bezirk gewinnt, wenn sie mindestens die Hälfte der Stimmen in diesem Bezirk auf sich vereinigen kann.

Frage 8. [10 Punkte] Berechnet die Effizienzlücke.

Frage 9. [15 Punkte] Zeichnet die simulierte Sitzkurve.

Frage 10. [5 Punkte] Bestimmt die Höhe der simulierten Sitzkurve in Bezug auf den Punkt $(0.5, 0.5)$. Beachtet das Vorzeichen.

Frage 11. [10 Punkte] Wenn wir davon ausgehen, dass eine der beiden Parteien Gerrymandering betrieben hätte, um die Wahlergebnisse zu manipulieren, welche Partei wäre es dann, nur basierend auf dem Ergebnis von Frage 10?

4 Iowa [120 Punkte]

In Iowa ist neben der republikanischen Partei (R) und der demokratischen Partei (B) noch die libertäre Partei (G) vorzufinden. Angenommen, der Staat hat drei Millionen Wähler, die alle ihre Stimme abgeben und es wird das Borda-Verfahren zur Ermittlung des Wahlergebnisses verwendet.

Frage 1. [5 Punkte] Wie viele Punkte werden nach dem Borda-Verfahren auf die Parteien verteilt?

Wir notieren mit $p_R \in [0, 1]$ den Anteil der Wählenden im Staat, die die rote Partei auf den ersten Platz gesetzt haben. Analog verwenden wir p_B und p_G für den Anteil der Wählenden, die die blaue beziehungsweise gelbe Partei auf den ersten Platz gesetzt haben.

Frage 2. [5 Punkte] Wenn wir annehmen, dass alle Wählenden eine gültige Stimme abgeben, welche Gleichung müssen dann p_R , p_B und p_G erfüllen?

Mit p_{BRG} bezeichnen wir den Anteil der Wählenden mit der Präferenz $B \succ R \succ G$. Auf analoge Weise definieren wir die Bezeichnung p_{BGR} , p_{RBG} , p_{RGB} , p_{GRB} und p_{GBR} .

Frage 3. [10 Punkte] Es gilt, dass $p_R = p_{RBG} + p_{RGB}$, weil alle Wählenden, die die rote Partei auf die erste Stelle setzen entweder die blaue Partei auf die zweite und die gelbe Partei auf die dritte setzen oder andersherum. Stellt analoge Gleichungen für p_B und p_G auf.

Frage 4. [10 Punkte] Die Anzahl der Wählenden, die die rote Partei an erster Stelle wählen ist $3\,000\,000 p_R$. Die Wählenden, die die rote Partei an die zweite Stelle setzen, sind genau diejenigen mit der Präferenz $B \succ R \succ G$ oder $G \succ R \succ B$. Alle anderen Wählenden setzen die rote Partei auf den letzten Platz. Schreibt nach dem Borda-Verfahren das Ergebnis der roten Partei in Abhängigkeit von p_R , p_{GRB} , p_{GBR} , p_{BGR} und p_{BRG} .

Frage 5. [10 Punkte] Gebt einen Ausdruck für das Ergebnis der gelben Partei an, der nur von p_G , p_{BGR} und p_{RGB} abhängt, an.

Nach der Wahl werden die folgenden Ergebnisse bekannt gegeben:

$$p_R = 0.5 \quad p_B = 0.4, \quad p_{RGB} = 0.1, \quad p_{BRG} = 0.1, \quad p_{GBR} = p_{GRB}.$$

Beantwortet mit Hilfe dieser Informationen die folgende Frage:

Frage 6. [20 Punkte] Wie viele Punkte erhält jede Partei und wer gewinnt die Wahl?

Da der Sieg in der Regel entweder an die rote oder an die blaue Partei geht, wählen die Wählenden, die eine dieser Parteien favorisieren, taktisch. Sie tun dies, indem sie ihren Favoriten auf die erste Stelle setzen und die gelbe Partei auf die zweite Stelle, unabhängig ihrer tatsächlichen Präferenz. Auf diese Weise kommt der größte Konkurrent ihrer Partei auf die letzte Stelle. Für die restlichen Fragen nehmen wir an, dass alle Wählenden ihr Wahlverhalten so anpassen: Wer die rote oder die blaue Partei auf den ersten Platz setzt, setzt die gelbe Partei auf den zweiten Platz.

Frage 7. [10 Punkte] Schreibt das Ergebnis der gelben Partei, so dass dieses nur von p_G abhängt.

Frage 8. [20 Punkte] Findet zwei Terme, die nur p_R , p_B , p_{GRB} und p_{GBR} enthalten und die strikt positiv sein müssen, damit die gelbe Partei die meisten Punkte erhält.

Frage 9. [10 Punkte] Was könnt ihr über die Wahlergebnisse sagen, wenn $p_R < 0.5$ und $p_B < 0.5$?

Zum Zeitpunkt der Wahl werden folgende Ergebnisse bekannt gegeben:

$$p_R = 0.5, \quad p_B = 0.4, \quad p_{GBR} = p_{GRB}.$$

Beantwortet die letzte Frage anhand dieser Angaben.

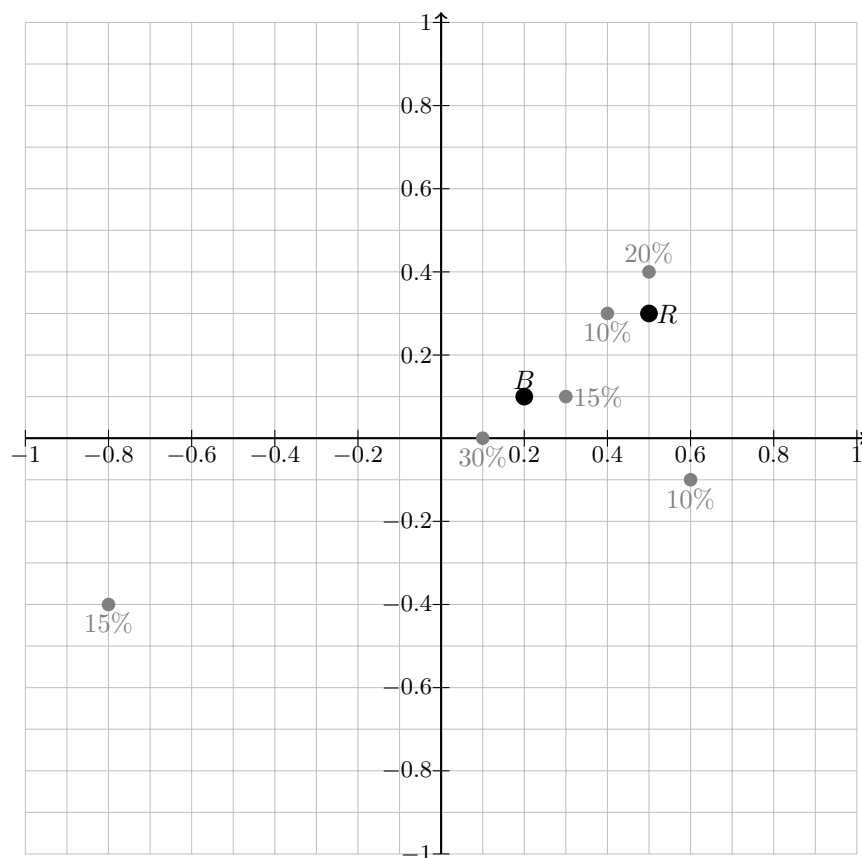
Frage 10. [20 Punkte] Berechnet das Ergebnis jeder Partei und ermittelt den Gewinner.

5 Idaho [80 Punkte]

Idaho ist ein kleiner Staat mit nur zwei Wahlbezirken. Angenommen, die rote (R) und die blaue Partei (B) treten jeweils mit einer Kandidatin oder einem Kandidaten an.

In beiden Bezirken können wir die politischen Situationen mithilfe eines **politischen Kompass** darstellen. Dies ist ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ und $(1, -1)$ in der Ebene. Die horizontale Achse stellt eine Skala für die wirtschaftliche Ansichten einer Person oder einer Gruppe dar, die vertikale Achse misst den sozialen Aspekt.

Im ersten Bezirk befindet sich die blaue Kandidatin oder der blaue Kandidat im Punkt $(0.2, 0.1)$ und der oder die rote im Punkt $(0.5, 0.3)$. Den Wählenden wird auch ein Platz auf dem Kompass zugewiesen. So steht jeder graue Punkt für einen Anteil der Wählenden im Bezirk. Die Präferenz der Wählenden für eine Kandidatin oder einen Kandidaten ist umso größer, je näher diese oder dieser den Wählenden auf dem politischen Kompass liegt. Sprich: Die Wählenden wählen mit ihrer ersten Stimme immer die*denjenigen Kandidat*in, die*der ihnen am nächsten liegt, und - sofern sie mehrere Stimmen haben - mit der zweiten Stimme die*denjenigen Kandidat*in, die*der ihnen am zweitnächsten liegt, usw.



Frage 1. [10 Punkte] Welche Kandidatin oder welcher Kandidat gewinnt nach dem Mehrheitswahlrecht?

Es soll nun wieder das Borda-Verfahren betrachtet werden. Nehmen wir an, dass die rote Partei das Wahlergebnis beeinflussen will, indem sie eine zweite Kandidatin oder einen zweiten Kandidaten R' ins Rennen schickt. Sie will nicht, dass diese neue Kandidatin oder dieser neue Kandidat gewinnt, sondern, dass ihre oder seine Teilnahme dazu führt, dass R besser abschneidet. Deshalb wird R' so auf dem politischen Kompass positioniert, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Keiner der Wählenden sollte die Kandidatin oder den Kandidaten R auf den letzten Platz setzen.
- Wählende, die ursprünglich Kandidatin oder Kandidat R bevorzugt haben, müssen diese oder diesen weiterhin auf den ersten Platz setzen und ihre zweite Wahl muss R' sein, sodass B an letzter Stelle steht.

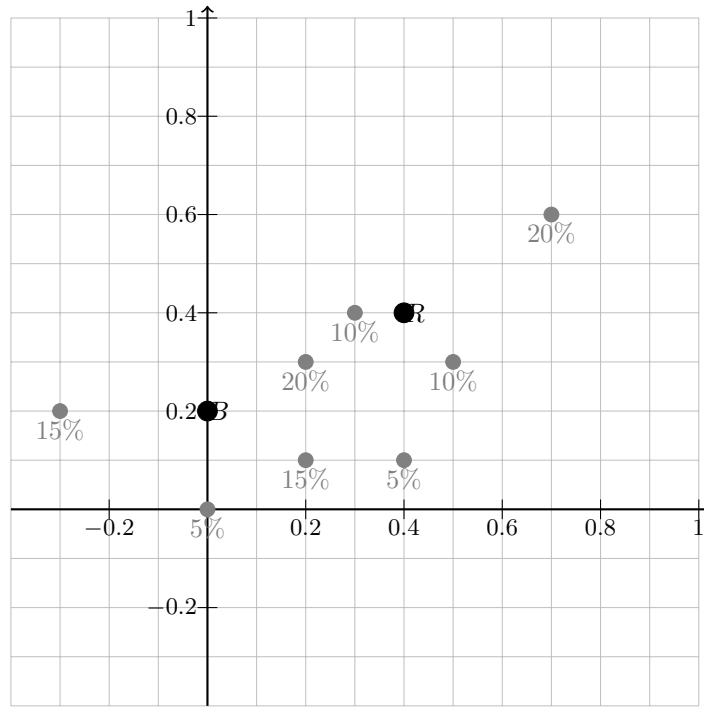
Anmerkung zur folgenden Frage 2: Im Wettbewerb war diese Aufgabe durch einen Nachkommafehler nicht lösbar und wurde daher aus der Wertung genommen. Um die Aufgabe als Vorbereitung auf den Wettbewerb sinnvoll nutzen zu können, wurden die Antwortmöglichkeiten im Folgenden angepasst:

Frage 2. [20 Punkte] Damit eine Kandidatin oder ein Kandidat R' die oben stehenden Bedingungen erfüllt muss er in einem bestimmten Bereich auf dem politischen Kompass platziert werden. Von den folgenden sechs Positionen eignet sich nur **genau eine** Position. Um welche handelt es sich?

Möglichkeit	Koordinaten
1	(0, 35 0, 53)
2	(0, 4 0, 13)
3	(0, 45 0, 3)
4	(0, 6 0, 43)
5	(0, 65 0, 33)
6	(0, 1 0, 23)

Frage 3. [20 Punkte] Wie groß muss der anfängliche Anteil an Wählenden für R sein, damit nach der Einführung einer Kandidatin oder eines Kandidaten R' , wie in der vorherigen Frage, R nach dem Borda-Verfahren gewinnt.

Im zweiten Bezirk sieht der politische Kompass wie folgt aus. Der Ausschnitt, der in der Abbildung nicht dargestellt ist, enthält keine Daten.



In diesem Bezirk wird eine sogenannte **Zustimmungswahl** durchgeführt, bei der die Wählenden die Kandidierenden entweder bestätigen oder ablehnen können: Die Wählenden stimmen entweder für keinen, für genau einen oder für beide Kandidierenden. Jede Stimme ist einen Punkt wert. Die Kandidatin oder der Kandidat mit den meisten Punkten gewinnt die Wahl.

Frage 4. [10 Punkte] Welche Kandidatin oder welcher Kandidat gewinnt die Wahl, wenn alle Wählenden genau für die Kandidierenden stimmen, die auf dem politischen Kompass höchstens einen Abstand von 0.4 Einheiten zu den jeweiligen Wählenden haben?

In der Praxis werden nicht alle Wählenden gleich streng sein, wenn es darum geht, einer Kandidatin oder einem Kandidaten zuzustimmen. Wählende, die sich eher in der Mitte des politischen Kompasses befinden, stimmen eher auch für Kandidierende, die weiter von ihnen entfernt sind, während radikalere Wählende nur für Kandidierende stimmen, die ihnen nahestehen.

Frage 5. [10 Punkte] Angenommen, eine Wählerin oder ein Wähler befürwortet eine Kandidatin oder einen Kandidaten, wenn sie oder er sich auf dem politischen Kompass innerhalb einer Entfernung r befindet, wobei r linear abnimmt, wenn die Wählerin oder der Wähler weiter vom politischen Zentrum $(0, 0)$ entfernt liegt. Wenn die “Zustimmungsdistanz” r für eine Wählerin oder einen Wähler in der Mitte 0.4 beträgt und die “Zustimmungsdistanz” genau in den Ecken des Quadrates mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ und $(1, -1)$ den Wert 0 hat (und sonst überall einen Wert größer als 0), wie groß ist dann der “Zustimmungsradius“ für eine Wählerin oder einen Wähler am Punkt (x, y) auf dem politischen Kompass?

Frage 6. [10 Punkte] Welchen Anteil an Zustimmung erhalten die Kandidierenden, wenn alle Wählenden ihre Stimme für jede Kandidatin oder jeden Kandidaten geben, die oder der höchstens einen Abstand von r hat, wie in der vorherigen Frage beschrieben?