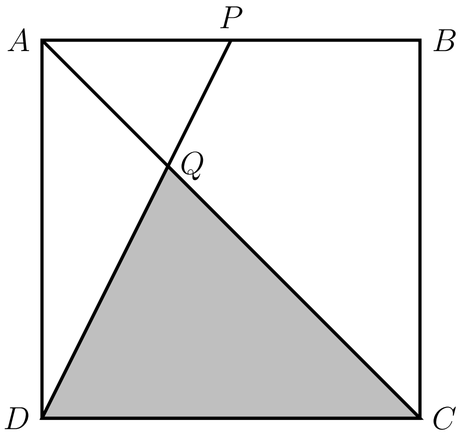
Aufgabe 1 (20 Punkte, 2×)

In einem Quadrat $DCBA$ mit Seitenlänge 1 verbinden wir die Ecke D mit dem Punkt P, der sich in der Mitte der Seite AB befindet. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Strecke DP mit der Diagonalen AC als Q.



Wie groß ist die Fläche des Dreiecks DCQ?

1/3

Ausarbeitung Aufgabe 1

Es gilt offenbar:

$$A_{\Delta ADP} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad A_{\Delta ACB} = \frac{1}{2}.$$

Nach dem Strahlensatz ist weiterhin:

$$A_{\Delta DCQ} = 4 \cdot A_{\Delta AQP}$$

und damit

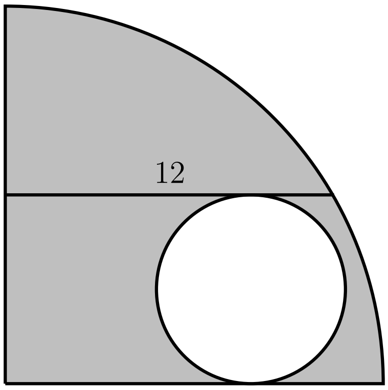
$$\begin{aligned} A_{\Delta DCQ} &= 1 - A_{\Delta ADP} - A_{\Delta ACB} + A_{\Delta AQP} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} A_{\Delta DCQ}. \end{aligned}$$

Man erhält:

$$A_{\Delta DCQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe **2** (30 Punkte, 3×)

Innerhalb eines Viertelkreises ist ein kleinerer Kreis platziert, der unten eine der beiden geradlinigen Seiten des Viertelkreises berührt. Die Strecke in dem Viertelkreis, die parallel zur bereits betrachteten geradlinigen Seite des Viertelkreises verläuft und oben den kleinen Kreis berührt, hat eine Länge von 12.



Wie groß ist die Fläche des Bereichs, der innerhalb des Viertelkreises liegt, aber außerhalb des kleinen Kreises?

36π

Ausarbeitung Aufgabe **2**

Wir bezeichnen mit R den Radius des Viertelkreises und mit r den Radius des kleinen Kreises. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$R^2 = 12^2 + (2r)^2,$$

also:

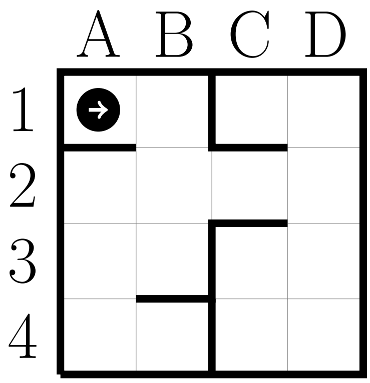
$$\frac{R^2}{4} - r^2 = 36.$$

Die gesuchte Fläche ist somit:

$$\frac{R^2}{4}\pi - r^2\pi = 36\pi.$$

Aufgabe 3 (20 Punkte, 2×)

Im folgenden 4×4 Labyrinth befindet sich ein Roboter am Ort A1 und schaut nach rechts.



In diesem Labyrinth stellt jede dicke schwarze Linie eine Wand dar, die der Roboter nicht durchqueren kann. Jede Minute führt der Roboter eine der folgenden Bewegungen aus:

- Wenn der Roboter sich in die Richtung bewegen kann, in die er schaut, geht er einen Schritt in diese Richtung.
- Wenn der Roboter sich in diese Richtung nicht bewegen kann, dreht er sich im Uhrzeigersinn um 90 Grad.

An welchem Ort befindet sich der Roboter nach 2023 *Minuten?*

$D4$

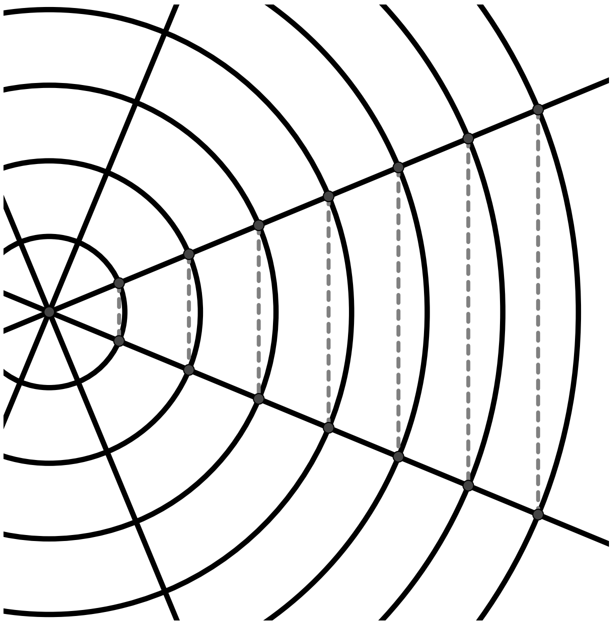
Ausarbeitung Aufgabe 3

Nach 14 Schritten steht der Roboter in D3 und schaut nach unten. Dann kommen wir in eine Schleife (modulo 8). Nach $2022 = 14 + 251 \cdot 8$ Minuten sind wir also erneut in D3 und schauen nach unten. Die Antwort lautet somit $D4$.

documentclassestafette

Aufgabe 4 (30 Punkte, 3x)

Gegeben seien sieben konzentrische Kreise, mit den Radien a, $2a$, $3a$, ..., $7a$, wobei $a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Vom Mittelpunkt der Kreise aus verlaufen acht Halbgeraden, bei denen zwei benachbarte Halbgeraden jeweils denselben Winkel miteinander einschließen. Wir wählen nun zwei benachbarte Halbgeraden fest aus. Die Strecke zwischen den Schnittpunkten der Halbgeraden mit einem der sieben Kreise bildet eine Sehne dieses Kreises.



Wie groß ist das Quadrat der Summe der Längen dieser sieben Sehnen?

(Hinweis: Es gilt:

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}} \quad \text{und} \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha).)$$

1568

Ausarbeitung Aufgabe 4

Die Halbgeraden schneiden sich in einem Winkel von 45 Grad. Betrachtet man den Kreis mit dem Radius ka, so sieht man ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge ka. Die Basiswinkel betragen $\frac{180-45}{2} = 67.5$ Grad. Die Sehne des Kreises entspricht der Basis des Dreiecks, nennen wir sie x_k. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
x_k &= 2ka\cos(67.5^\circ)\\
&= 2ka\sqrt{\frac{1+\cos(135^\circ)}{2}}\\
&= 2ka\sqrt{\frac{1-\cos(45^\circ)}{2}}\\
&= 2k\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}\\
&= k\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Die Summe der Längen der Sehnen ist somit

$$(1+2+3+4+5+6+7)\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$$

und ihr Quadrat ist $784 \cdot 2 = 1568$.

Aufgabe 5 (20 Punkte, 2x)

Man stelle sich einen typischen Taschenrechner mit 10 Ziffern vor.

Man kann zehnstellige Zahlen erzeugen, indem man bei einer beliebigen Ziffer beginnt und alle 10 Ziffern, jede genau einmal, eintippt. Hierbei darf man sich zwischen den Ziffern nur in Springerzügen wie beim Schach bewegen (L-förmige Züge). So kann man beispielsweise von der 7 nur zur 2 oder 6 gelangen.

Was ist die Summe aller zehnstelligen Zahlen, die man auf diese Weise erzeugen kann?

23 168 007 522

Ausarbeitung Aufgabe 5

Man sieht leicht, dass es nur einen Verbindungpunkt zur 5 gibt, der von der 0 ausgeht und dann weiter zur 3 führt. Also muss die Zahl mit 503 beginnen oder auf 305 enden. Von der 3 gibt es zwei Wege zu den verbleibenden 8 Ziffern: 34927618 und 38167294. Insgesamt kann man also die folgenden vier Zahlen erzeugen: 5034927618, 5038167294, 8167294305, 4927618305. Ihre Summe ist 23168007522.

Aufgabe 6 (30 Punkte, 2x)

Wie viele Paare natürlicher Zahlen (a, b) mit a, $b \in \mathbb{N}_0$ gibt es, so dass

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2023} \text{ ?}$$

Beachten Sie, dass die Reihenfolge eine Rolle spielt: $(2023, 0)$ und $(0, 2023)$ sind zwei verschiedene Lösungen.

18

Ausarbeitung Aufgabe 6

Wir können die Gleichung umschreiben als

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 17\sqrt{7}.$$

Eine direkte Berechnung ergibt:

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} = 17\sqrt{7} \;&\Rightarrow\; \sqrt{a} = 17\sqrt{7} - \sqrt{b} \\ &\Rightarrow\; a = 7 \cdot 17^2 + b - 2 \cdot 17\sqrt{7}\sqrt{b} \\ &\Rightarrow\; 2 \cdot 17\sqrt{7}\sqrt{b} = 7 \cdot 17^2 + b - a \\ &\Rightarrow\; 2^2 \cdot 17^2 \cdot 7b = (7 \cdot 17^2 + b - a)^2.\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der letzten Gleichung ein Quadrat ist, muss auch die linke Seite ein Quadrat sein. Folglich muss b von der Form

$$b = 7k^2 \tag{1}$$

für eine ganze Zahl k sein. Wir können $k \geq 0$ annehmen. Setzen wir dies in die Ausgangsgleichung ein, so erhalten wir: $\sqrt{a} + k\sqrt{7} = 17\sqrt{7}$, oder aber: $\sqrt{a} = (17 - k)\sqrt{7}$. Daraus folgt notwendig $k \leq 17$ und

$$a = 7(17 - k)^2. \tag{2}$$

Alle Lösungen (a, b) mit a, $b \in \mathbb{N}_0$ sind also notwendig durch (1) und (2) mit $k \in \{0, 1, \ldots, 17\}$ parametrisiert. Umgekehrt lösen all diese 18 Paare (a, b) auch tatsächlich wegen

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{7(17 - k)^2} + \sqrt{7k^2} = \sqrt{7}(17 - k) + \sqrt{7}k = 17\sqrt{7} \tag{3}$$

die Ausgangsgleichung.

Aufgabe 7 (20 Punkte, 2×)

Das Produkt der Ziffern einer Zahl wird als Querprodukt bezeichnet. Von diesem Querprodukt kann man wieder das Querprodukt berechnen usw. Das Querprodukt einer mehrstelligen Zahl ist stets kleiner als die Zahl selbst. Daher endet die Folge der iterierten Querprodukte für jede mehrstellige Startzahl nach endlich vielen Schritten bei einer einstelligen Zahl. Die Anzahl der notwendigen Schritte wird als Beharrlichkeit einer Zahl bezeichnet.

Was ist die kleinste natürliche Zahl mit Beharrlichkeit 4*?*

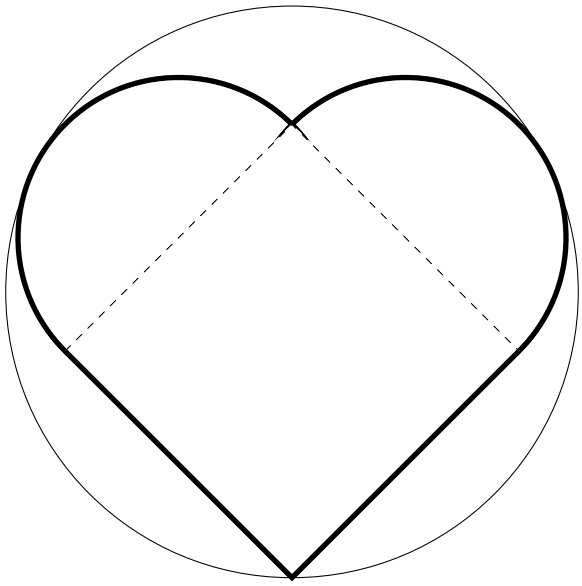
77

Ausarbeitung Aufgabe 7

Offenbar ist 25 die kleinste Zahl mit Beharrlichkeit 2. Daher müssen alle Zahlen mit Beharrlichkeit 3 ein Querprodukt von mindestens 25 haben. Die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist 39 und in der Tat gilt: $3 \cdot 9 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$. Die kleinste Zahl mit Beharrlichkeit 4 muss daher ein Querprodukt von mindestens 39 haben. Wegen $4 \cdot 9 = 36 < 39$ kommen hier nur Zahlen ab 50 in Frage. Für die ersten in Frage kommenden Zahlen 58, 59, 67, 68, 69 und 76 überprüft man schnell, dass sie eine Beharrlichkeit von höchstens 3 haben. Hingegen gilt: $7 \cdot 7 = 49$, $4 \cdot 9 = 36$, $3 \cdot 6 = 18$, $1 \cdot 8 = 8$.

Aufgabe 8 (30 Punkte, 3×)

Wir formen ein Herz, indem wir auf zwei nebeneinanderliegenden Seiten eines Quadrats jeweils einen Halbkreis platzieren, der die Eckpunkte berührt. Anschließend zeichnen wir den umschriebenen Kreis, der die beiden Halbkreise berührt und durch den unteren Eckpunkt des Quadrats verläuft.

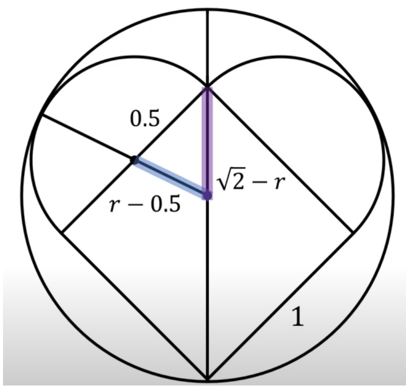


Wie groß ist der Radius des umschriebenen Kreises, wenn die Seite des Quadrats eine Länge von 1 hat? Der Wert ist von der Form $\frac{1}{a\sqrt{2}+b}$. Gib als Lösung das Paar (a, b) mit rationalen Zahlen a, b an.

$\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

Ausarbeitung Aufgabe 8

Wir zeichnen zunächst einige Hilfslinien ein:



Nach dem Cosinussatz gilt:

$$(r-0.5)^2 = 0.5^2 + (\sqrt{2}-r)^2 - 2 \cdot 0.5 \cdot (\sqrt{2}-r) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Man berechnet

$$-r + 2\sqrt{2}r - \frac{1}{\sqrt{2}}r = 1$$

und damit $r = \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{2}-1}$, also: $(a, b) = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$.

Aufgabe 9 (20 Punkte, 3x)

Alice und Bob werfen eine faire Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% auf Kopf und mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% auf Zahl fällt. Sie spielen das folgende Spiel: Wenn zuerst dreimal hintereinander Kopf auftritt, gewinnt Alice. Tritt zuerst die Kombination (Zahl, Kopf, Kopf) auf, gewinnt Bob.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice das Spiel gewinnt?

$\frac{1}{8}$ oder 0.125 oder 12.5%

Ausarbeitung Aufgabe 9

Sobald einmal Zahl fällt, kann Alice nicht mehr gewinnen. Sie gewinnt nur, wenn die ersten drei Würfe Kopf sind, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Aufgabe **10** (30 Punkte, 3x)

Ein Händler verwendet eine klassische Waage wie in der folgenden Abbildung dargestellt. Er möchte Gegenstände mit einer Masse von 1 bis 40 kg mit dieser Waage abwiegen können. Dazu könnte er 40 Gewichte von jeweils exakt 1 kg verwenden, aber er möchte die Anzahl der Gewichte minimieren.

Beispiel: Angenommen der Händler hat ein Gewicht mit 2 kg und ein Gewicht mit 5 kg. Dann kann er damit 2, 3, 5 und 7 kg messen.

Was sind die Werte (in kg) für die minimale Anzahl an ganzzahligen Gewichten?

Notieren Sie die Werte in aufsteigender Reihenfolge in Ihrer Antwort.

$1, 3, 9, 27$

Ausarbeitung Aufgabe **10**

Mit den Gewichten der Massen 1, 3, 9 und 27 kg kann man alle Werte von 1 bis 40 kg messen, denn jede Zahl $x \in \{1, 2, \ldots\ 40\}$ hat eine Darstellung der Art

$$x = \sum_{i=0}^{3} x_i 3^i$$

mit $x_i \in \{-1, 0, 1\}$ für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Bei drei Gewichten kann man maximal $3^3 = 27$ Massen messen, so dass eine kleinere Anzahl an Gewichten nicht in Frage kommt.

Aufgabe 11 (20 Punkte, 3x)

Wie groß ist der Rest bei der Division von 11^{2023} *durch* 100*?*

31

Ausarbeitung Aufgabe 11

Man beachte:

$$11^{2023} = (10+1)^{2023}.$$

Wir können diese Summe mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes via

$$(10+1)^{2023} = \sum_{i=0}^{2023} \binom{2023}{i} \cdot 10^i$$

ausrechnen. Die meisten der dort auftretenden Terme sind Vielfache von 100 und tragen daher nichts zum Rest bei der Division durch 100 bei. Nur zwei Terme (für $i = 1$ und $i = 0$) leisten einen Beitrag. Diese Terme sind $2023 \cdot 10$ und 1. Die Summe ist 20231, also ist der Rest bei der Division durch 100 gleich 31.

Aufgabe **12** (30 Punkte, 3x)

Jeden Samstag spielen Katrien und Maren von 17:00 Uhr bis 18:00 Uhr Tennis. Katriens Ehemann holt sie immer ab. Dazu fährt er von zu Hause mit dem Auto zum Tennisplatz, kommt dort genau um 18:00 Uhr an und sie fahren dann sofort gemeinsam nach Hause.

Am letzten Samstag kam Katrien gerade rechtzeitig zum Tennisplatz, als ihr einfiel, dass Maren abgesagt hatte. Sie rief ihren Ehemann zu Hause an, um sie abzuholen, und ging ihm dann um 17:00 Uhr zu Fuß entgegen. Eine Weile später holte ihr Ehemann sie ab, und sie fuhren gemeinsam den verbleibenden Teil mit dem Auto nach Hause. Auf diese Weise kamen sie letztendlich 20 Minuten früher als gewöhnlich gemeinsam zu Hause an, und Katriens Mann verbrachte 20 Minuten weniger Zeit im Auto als sonst. Wir gehen davon aus, dass Katriens Mann immer genau gleich schnell fährt.

Wie viele Minuten ist Katrien gelaufen?

50

Ausarbeitung Aufgabe **12**

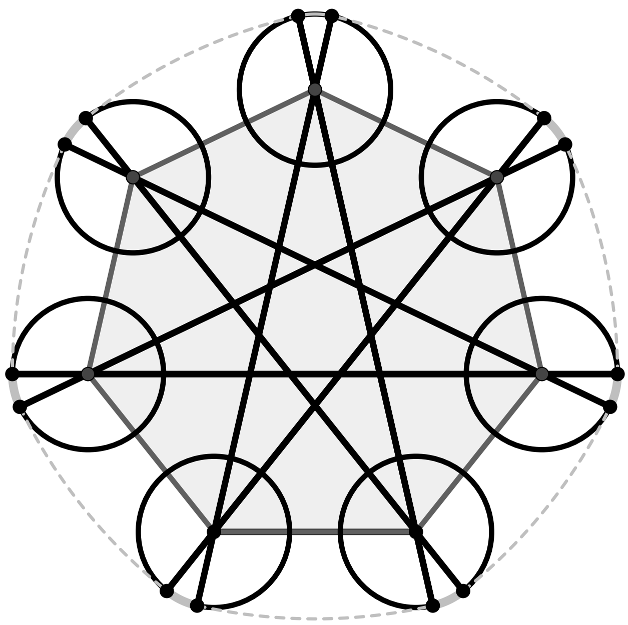
Wir nehme an, die Autofahrt vom Tennisplatz nach Hause dauert x Minuten und Katrien ist y Minuten gelaufen. Dann sind Katrien und ihr Mann normalerweise um 18 Uhr plus x Minuten zu Hause. Letzten Samstag kamen sie um 17 Uhr plus $2y$ Minuten zu Hause an, da Katriens Mann y Minuten zum Abholpunkt fuhr (und zugleich Katrien y Minuten lief) und sie dann gemeinsam erneut y Minuten bis nach Hause brauchten. Da sie 20 Minuten früher als sonst zu Hause waren, ergibt sich die Gleichung $x + 40 = 2y$.

Da Katriens Mann auf dem ersten Teil seiner Fahrt 10 Minuten weniger im Auto saß als sonst auf einer Fahrt zum Tennisplatz (oder zurück), ergibt sich zudem die Gleichung $y = x - 10$.

Das Lösen beider Gleichungen ergibt $y = 50$ und $x = 60$. Katrine musste also 50 Minuten laufen.

Aufgabe **13** (20 Punkte, 2x)

Gegeben sei ein regelmäßiges Siebeneck, dessen längste Diagonalen zwischen zwei Eckpunkten die Länge 6 haben. In jedem Eckpunkt zeichnen wir einen vollständigen Kreis mit einem Radius von 1 sowie jeweils einen Bogen eines Kreises mit Radius 7 zwischen den von diesem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen (gestrichelte Linie). Wir betrachten die geschlossene umhüllende Kurve k der Gesamtfigur (abwechselnd gestrichelt und durchgezogen).



Die Länge der Kurve k ist $x \cdot \pi$ mit einer rationalen Zahl x.

Welchen Wert hat x?

8

Ausarbeitung Aufgabe **13**

Der Winkel zwischen zwei Diagonalen, die von einem Scheitelpunkt des regelmäßigen siebenseitigen Vielecks ausgehen, ist $\frac{\pi}{7}$. Der umschließende Kreis ist also die Kombination eines Halbkreises mit dem Radius 7 und eines Halbkreises mit dem Radius 1. Der Umfang ist also $7\pi + \pi = 8\pi$, und somit ist $x = 8$.

Aufgabe **14** (30 Punkte, 2x)

Lars und Kristof fragen Anne nach ihrer Lieblingszahl. Anne verrät Lars die erste Ziffer und Kristof die zweite Ziffer. Dann teilt sie beiden mit, dass ihre Lieblingszahl in der folgenden Liste vorkommt:

35, 36, 39, 57, 58, 74, 76, 94, 95, 97.

Lars betrachtet die Liste und sagt: "Ich weiß nicht, was Annes Lieblingszahl ist, aber ich bin mir auch sicher, dass Kristof es nicht weiß"

Daraufhin antwortet Kristof: „Ursprünglich wusste ich nicht, was Annes Lieblingszahl war, aber jetzt weiß ich es.“

Schließlich sagt Lars: „Dann weiß ich es jetzt auch.“

Was ist Annes Lieblingszahl?

76

Ausarbeitung Aufgabe **14**

Die Tatsache, dass Lars mit Sicherheit wusste, dass Kristof Annes Lieblingszahl nicht wusste, bedeutet, dass er eine erste Ziffer erhalten hat, für die auch die zweite Ziffer aller zugehörigen zweistelligen Zahlen in der Liste nicht eindeutig ist. Lars erste Ziffer kann also weder 3 sein (da dann 9 eine eindeutige zweite Ziffer wäre) noch 5 (da dann 8 eine eindeutige zweite Ziffer wäre). Kristof begreift dies und erkennt, dass Lars entweder die Ziffer 7 oder doe Ziffer 9 erhalten haben muss. Die Tatsache, dass er daraufhin sagt, dass er jetzt die Lieblingszahl kennt, bedeutet, dass er eine zweite Ziffer erhalten hat, die in der ursprünglichen Liste nicht eindeutig war, aber jetzt eindeutig unter den zweistelligen Zahlen ist, die mit 7 oder 9 beginnen. Also muss die zweite Ziffer 6, 5 oder 7 gewesen sein. Lars sagt, dass er es jetzt auch weiß, was bedeutet, dass Annes Lieblingszahl die 76 sein muss, denn wenn er eine 9 erhalten hätte, gäbe es immer noch zwei Möglichkeiten.

Aufgabe **15** (20 Punkte, 2x)

Das Achter-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ besteht aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 8$ in beliebiger Reihenfolge. Jede der Zahlen kommt also genau einmal vor.

Was sind die möglichen Werte von

$$\min\{\max\{\min\{a_1, a_2\}, \min\{a_3, a_4\}\}, \max\{\min\{a_5, a_6\}, \min\{a_7, a_8\}\}\} \text{ ?}$$

Notieren Sie in Ihrer Antwort die Werte in aufsteigender Reihenfolge.

$2, 3, 4, 5$

Ausarbeitung Aufgabe **15**

Da wir ein Minimum von zwei Maxima bilden, kann als Ergebnis unmöglich 1 herausbekommen. Auch 8 ist nicht möglich, da wir am Ende ein Minimum von zwei verschiedenen Zahlen nehmen. Die folgenden Ergebnisse sind möglich:

$$\begin{aligned}
&\min\{\max\{\min\{1,3\}, \min\{2,4\}\}, \max\{\min\{5,6\}, \min\{7,8\}\}\} = 2\\
&\min\{\max\{\min\{1,2\}, \min\{3,4\}\}, \max\{\min\{5,6\}, \min\{7,8\}\}\} = 3\\
&\min\{\max\{\min\{1,3\}, \min\{4,5\}\}, \max\{\min\{2,6\}, \min\{7,8\}\}\} = 4\\
&\min\{\max\{\min\{1,2\}, \min\{5,6\}\}, \max\{\min\{3,4\}, \min\{7,8\}\}\} = 5.
\end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass es nur diese vier verschiedenen möglichen Ergebnisse gibt.

Nehmen wir an, wir kommen auf 6. Dann muss das eine Maximum 6 sein und das andere 7 oder 8. Dies ist nur möglich, wenn eines der Minima über 7 und 8 gebildet wird. Damit kann aber 6 nicht das Ergebnis der Bildung eines Minimums sein. Wir schließen daraus, dass 6 nicht realisierbar ist. Analog stellen wir fest, dass 7 nicht möglich ist.

Aufgabe **16** (30 Punkte, 3x)

Wie spät ist es, wenn der Stundenzeiger den gleichen Winkel zur 6-Uhr-Richtung bildet wie der Minutenzeiger, sich der Stundenzeiger zwischen 8 und 9 Uhr befindet und sich der Minutenzeiger in der rechten Hälfte der Uhr befindet? Geben Sie die genaue Anzahl der Minuten nach 8:00 Uhr als Antwort an.

(Hinweise: (1) Die Lösung ist nicht ganzzahlig. (2) Um 8:10 Uhr bildet der Minutenzeiger beispielsweise einen Winkel von 120° und der Stundenzeiger einen Winkel von 35°.)

$18\frac{6}{13}$ oder $\frac{240}{13}$

Ausarbeitung Aufgabe **16**

Es sei m die Anzahl der Minuten nach 8 Uhr. Dann ist der Winkel für den Stundenzeiger zur 6-Uhr-Richtung gleich $60 + \frac{m}{60} \cdot 30$ und der Winkel für den Minutenzeiger zur 6-Uhr-Richtung gleich $180 \cdot \left(1 - \frac{m}{30}\right)$. Wir setzen beide Terme gleich und erhalten:

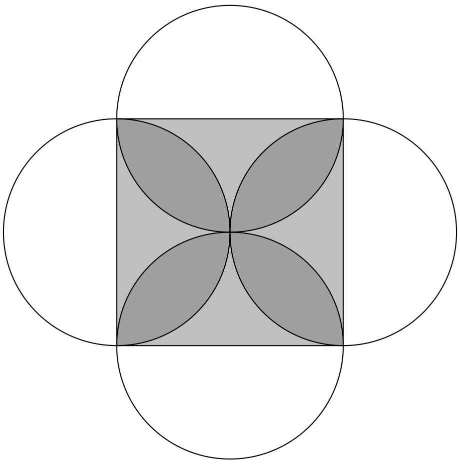
$$\frac{13}{2}m = 120,$$

also:

$$m = \frac{240}{13} = 18\frac{6}{13}.$$

Aufgabe **17** (20 Punkte, 2x)

Wir platzieren auf jeder Seite eines Quadrats einen Kreis, so dass der Mittelpunkt des Kreises der Seitenmittelpunkt ist und der Kreis durch zwei benachbarte Eckpunkte des Quadrats verläuft. Das Quadrat hat eine Seitenlänge von 1.



Wie groß ist die dunkelgraue Fläche (der Bereich im Quadrat, der von zwei Kreisen begrenzt wird)?

$\frac{\pi}{2} - 1$ oder $\frac{\pi-2}{2}$

Ausarbeitung Aufgabe **17**

Das Quadrat hat den Flächeninhalt 1. Die Fläche jedes Halbkreises ist $\frac{\pi}{8}$. Die Summe der vier Halbkreise ist also $\frac{\pi}{2}$. Dies entspricht der Summe der hellgrauen Fläche und der doppelt gezählten dunkelgrauen Schnittfläche. Zieht man davon die Fläche des Quadrats (hellgraue Fläche plus dunkelgraue Fläche) ab, bleibt die dunkelgraue Fläche, nun einfach gezählt, übrig.

Aufgabe 18 (30 Punkte, 2x)

Jede Zahl kann ausgedrückt werden in einer Basis $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Wir nutzen standardmäßig die Dezimaldarstellung, also die Darstellung zur Basis $b = 10$. Zum Beispiel kann hier die Zahl 2023 zur Basis 10 ausgedrückt werden durch $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Zur Basis 9 ist die Darstellung von $2023 = (2687)_9$, denn $2023 = 2 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0$.

Ein Repunit zur Basis b ist eine Zahl, deren Darstellung zur Basis b nur 1en enthält. Beispielsweise ist $7 = (111)_2$ ein Repunit zur Basis 2.

Was ist die Summe aller Primzahlen, die Repunits zur Basis 4 *oder Repunits zur Basis* 9 *sind? Das Ergebnis ist im Dezimalsystem anzugeben.*

5

Ausarbeitung Aufgabe 18

Es gilt:

$$(\underbrace{11 \cdots 11}_{n-mal})_b = \sum_{i=0}^{n-1} b^i = \frac{b^n - 1}{b - 1}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{4^n - 1}{3} = \frac{(2^n + 1) \cdot (2^n - 1)}{3}.$$

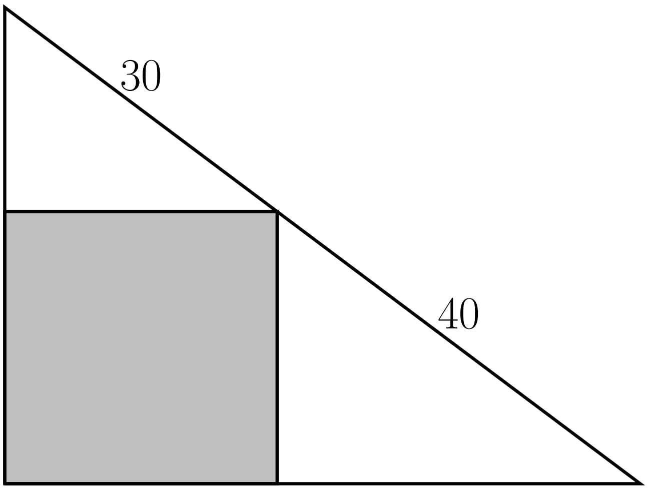
Für $n > 2$ ist $2^n + 1 > 2^n - 1 > 3$ und entweder $2^n - 1$ oder $2^n + 1$ durch 3 teilbar. Daher kann $\frac{4^n - 1}{3}$ nur für $n = 1$ oder $n = 2$ prim sein, liefert aber für $n = 1$ den Wert 1 und somit keine Primzahl. Für $n = 2$ erhält man den Wert 5 und somit eine Primzahl. Weiterhin ist

$$\frac{9^n - 1}{8} = \frac{(3^n + 1) \cdot (3^n - 1)}{8}.$$

Für $n > 2$ ist $3^n + 1 > 3^n - 1 > 8$ und $(3^n - 1)$ durch 2 und $(3^n + 1)$ durch 4 teilbar oder umgekehrt. Daher kann $\frac{9^n - 1}{8}$ nur für $n = 1$ oder $n = 2$ prim sein, liefert aber für $n = 1$ den Wert 1 und somit keine Primzahl und für $n = 2$ den Wert 10 und somit ebenfalls keine Primzahl.

Aufgabe **19** (20 Punkte, 2x)

Über einem Quadrat mit der Seitenlänge x legen wir ein rechtwinkliges Dreieck so, dass die Katheten teilweise mit den Seiten des Quadrats zusammenfallen und die Hypotenuse durch eine Ecke des Quadrats verläuft. Die Hypothenuse wird so in Strecken der Länge 30 und 40 unterteilt.



Wie groß ist x?

24

Ausarbeitung Aufgabe **19**

Wir wählen y (horizontal in der Skizze) so, dass $x + y$ die Basis des großen Dreiecks ist. Da alle Dreiecke ähnlich sind, gilt:

$$\frac{y}{40} = \frac{x}{30}.$$

Weiterhin gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$x^2 + y^2 = 40^2$$

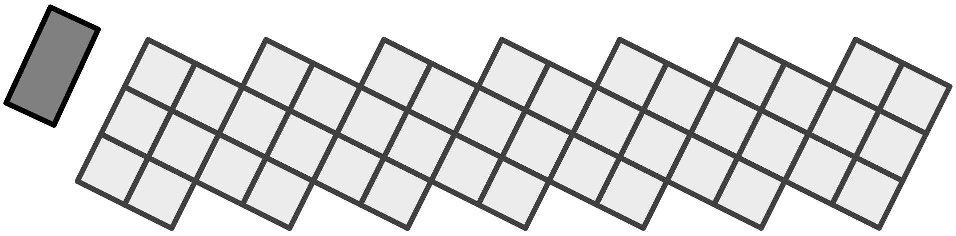
und somit:

$$\frac{25}{9}x^2 = 40^2.$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{40 \cdot 3}{5} = 24.$$

Aufgabe **20** (30 Punkte, 3x)



Auf wie viele Weisen kann man die Figur hier oben (bestehend aus 7×6 Quadraten) durch Dominosteine abdecken, die jeweils auf zweien dieser Quadrate zu liegen kommen?

3927

Ausarbeitung Aufgabe **20**

Wenn f_k für $k = 1, \ldots, 7$ die Anzahl der Möglichkeiten bezeichnet, auf die eine entsprechende Figur mit $k \cdot 6$ Quadraten durch Dominosteine abgedeckt werden kann, dann gilt: $f_1 = 3$, $f_2 = 3 \cdot 3 + 1$ und schließlich $f_{k+1} = 3 \cdot f_k + f_{k-1}$. Denn eine Überdeckungen von k Rechtecken (bestehend aus jeweils 6 Quadraten) ist auf zwei Arten möglich: Erstes, indem vorher bereits alle $k-1$ Rechtecke bedeckt waren, und zweitens, indem vorher $k-2$ Rechtecke bedeckt waren und die beiden verbleibenden Rechtecke durch die eindeutige Möglichkeit mit „Verstrebungen“ bedeckt werden. Damit ergibt sich dann das Ergebnis.