

Matheturnier 2022



Vorbereitungsmaterial

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer des internationalen Mathematikturniers 2022,

wie jedes Jahr folgt auf die vormittags stattfindende Staffel der „Sum of Us“-Wettbewerb, welcher sich mit einer mathematischen Anwendung befasst. Für eine optimale inhaltliche Vorbereitung möchten wir euch einladen, mit Hilfe des folgenden Vorbereitungsmaterials in das diesjährige Thema einzutauchen und die Möglichkeiten, die die Max-Plus-Algebra uns bietet, zu entdecken. Dabei wird es in erster Linie darum gehen, Strategien zu entwickeln, wie wir einen für eine gegebene Ausgangssituation optimalen Fahrplan erstellen können und wie wir bereits bestehende Fahrpläne verbessern können.

Da im Wettbewerb der Teamgedanke mit im Vordergrund steht, solltet ihr euch auch als Team vorbereiten. Dazu gehört die Diskussion von Inhalten sowie die Bearbeitung und Besprechung der bereitgestellten Übungsaufgaben. Lösungen für die Übungsaufgaben findet ihr im Anhang des Vorbereitungsmaterials.

Wie ihr vielleicht bereits festgestellt habt, ist das diesjährige Vorbereitungsmaterial, was die Seitenzahl angeht, etwas umfangreicher als in den Vorjahren. Dies ist in erster Linie den vielen Abbildungen, Tabellen und Matrizen geschuldet, die viel Platz einnehmen. Ihr werdet aber feststellen, dass sich einige Seiten dadurch sehr schnell durcharbeiten lassen. Damit ihr den inhaltlichen Überblick behaltet und schnell Zugriff auf wesentliche Formeln und Aussagen habt, haben wir grüne Merkkästen eingefügt. Diese könnten auch bei der Bearbeitung der Übungen oder der späteren Wettbewerbsaufgaben nützlich sein.

Wir möchten mit dem folgenden Material einen möglichst breiten Einblick in die Welt der Max-Plus-Algebra bieten. Aus diesem Grund befinden sich im Vorbereitungsmaterial auch komplexere Abschnitte, die eher theoretisch, aber notwendig sind, um allgemeine Aussagen treffen zu können. Falls bei euch in diesen Abschnitten Verständnisfragen aufkommen, sollte euch dies nicht entmutigen. Die Wettbewerbsaufgaben werden so ausgelegt sein, dass die Anwendungsmöglichkeiten im Vordergrund stehen. Zur Veranschaulichung haben wir zu einigen Abschnitten kurze Erklärvideos erstellt. Stellen, zu denen ein solches Video vorliegt, haben wir mit einem QR-Code am Rand markiert. Über den QR-Code rechts erhaltet ihr eine Übersicht aller Videos. Die Videos findet ihr auch auf der Website des Matheturniers.



Wir wünschen euch viel Spaß und Erfolg bei der Auseinandersetzung mit dem Thema und dem Turnier!

Inhaltsverzeichnis

1 Gedanken im Stau	3
2 Die Erkundung einer neuen Struktur	5
2.1 Operationen und Rechenregeln	5
2.2 Bestimmung des Minimums und lineare Gleichungssysteme	9
3 Max-Plus als Fahrplan-Algebra	14
3.1 Analyse eines Verkehrsnetzes	14
3.2 Matrizen in der Max-Plus-Algebra	23
3.3 Eigenwert und Eigenvektor	30
4 Wir erstellen einen Busfahrplan	36
4.1 Synchronisationsgraphen erstellen und deuten	37
4.2 Erstellung des Fahrplans	38
4.3 Interpretation der Einträge einer Gesamtmatrix	41
5 Max-Plus-Algebra-Anwendungen außerhalb des Fahrplankontexts	46
6 Anhang: Theoretische Hintergründe und Lösungsskizzen	52

1 Gedanken im Stau

Versetzt euch in folgende alltägliche Situation: Auf dem Weg zum Ziel eurer Klassenfahrt gerät euer Bus an einer großen ampelgesteuerten Kreuzung in einen Stau. Während ihr darauf wartet, dass die Ampel endlich wieder auf grün umspringt, überlegt ihr, wie so ein Ampelsystem überhaupt geschaltet wird.

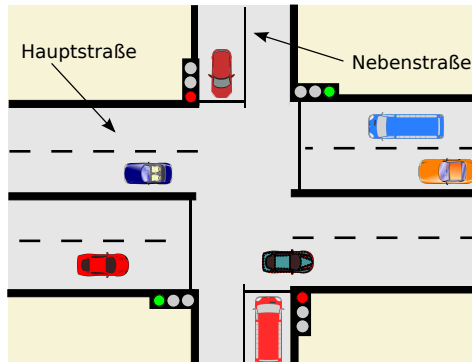


Abbildung 1: Verkehrssituation

Offensichtlich muss sichergestellt werden, dass zueinander quer verlaufender Verkehr nicht gleichzeitig fahren darf. Eine Ampel kann also erst grün werden, wenn die andere rot ist. Darüber hinaus soll das Umstellen auf grün ein paar Sekunden verzögert sein, damit sich beim Anfahren keine weiteren Autos auf der Kreuzung befinden. Ihr bemerkt, dass die Hauptstraße, die ihr kreuzt, deutlich längere Grünphasen zu haben scheint, und beginnt die Länge der verschiedenen Phasen zu zählen. Während eure Spur auf der Nebenstraße immer nur 30 Sekunden lang grünes Licht bekommt, darf der quer verlaufende Verkehr immer 120 Sekunden lang fahren.

Um das Verhalten der Ampelschaltung modellieren zu können, möchten wir uns die einzelnen Zeitspannen nun genauer anschauen. Damit ausreichend Zeit zum Bremsen bleibt, dauern die Gelbphasen fünf Sekunden. Zur Sicherheit haben alle Verkehrsteilnehmer für drei Sekunden gleichzeitig rot bevor eine Ampel für eine Sekunde rot-gelb und anschließend grün leuchtet. Dieser Vorgang wiederholt sich zyklisch, wie in Abbildung 2 zu erkennen ist.

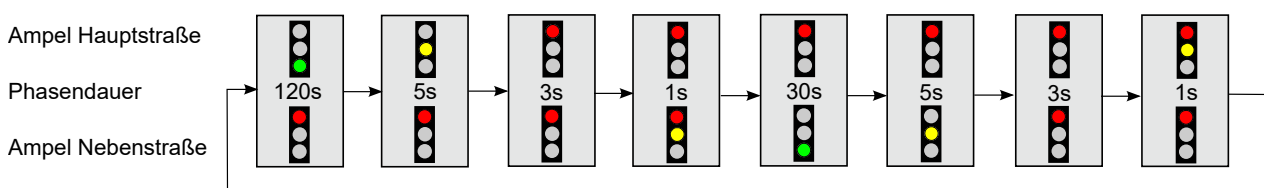


Abbildung 2: Phasen der Ampelschaltung

Euch ist aufgefallen, dass die Zyklen nicht immer gleich lang sind. Als keine Autos mehr über die Hauptstraße ankamen, blieb die Ampel für eure Spur länger grün, sodass sich der Stau endlich auflöste. Der erfahrene Busfahrer war nicht überrascht von der Ampelschaltung und erklärte, wie so ein System synchronisiert ist. Durch in der Kreuzung verankerte Induktionsschleifen kann das System erkennen, ob ein Auto an der Ampelkreuzung steht. Ist dies der Fall, wird die betroffene Ampel schneller grün. Eine grüne Ampel wird erst dann wieder gelb und anschließend rot, wenn sowohl die Mindestlänge der Grünphase abgelaufen ist als auch die Induktionsschleife auf der quer verlaufenden Fahrbahn ausgelöst wird. Diese Bedingungen wurden in der Darstellung der Schaltung in Abbildung 3 ergänzt.

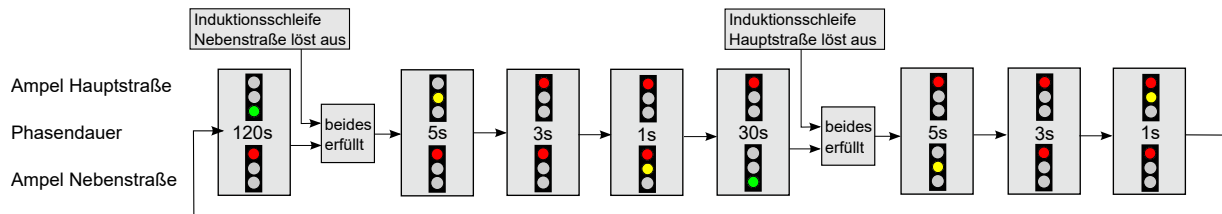


Abbildung 3: Phasen der Ampelschaltung mit Induktionsschaltung

Das Schaltsystem setzt sich also aus unmittelbar aufeinanderfolgenden Prozessen, wie dem Wechsel von gelb auf rot oder von rot-gelb auf grün, sowie aus parallel laufenden Prozessen, wie dem Auslösen der Induktionsschleife und der Länge der Grünphase, zusammen. Um die Länge eines solchen Zyklus mathematisch beschreiben zu können, müssen also die Längen der aufeinanderfolgenden Prozesse und die maximalen Längen der parallel stattfindenden Prozesse addiert werden. Um solche zeitbewerteten Synchronisationssysteme durch einfache Gleichungen modellieren zu können, führten Mathematiker in den 1980ern eine Struktur ein, bei der die Operationen Addition und Maximumbildung (kurz: „Max-Plus-Operationen“) verwendet werden.

2 Die Erkundung einer neuen Struktur

Damit wir uns ohne Missverständnisse über die Max-Plus-Operationen austauschen können, führen wir nun notwendige Begriffe und Notationen ein.

2.1 Operationen und Rechenregeln

Wir benötigen zunächst zwei neue Zeichen, durch die die Operatoren dargestellt werden. Für zwei reelle Zahlen x und y schreiben wir für die Maximumbildung, also der Wahl der größeren Zahl:

$$x \oplus y := \max\{x, y\}.$$

Auch für die übliche Addition reeller Zahlen führen wir ein neues Symbol ein:

$$x \odot y := x + y.$$

Verrechnen wir zum Beispiel die Zahlen 17 und 9, erhalten wir

$$17 \oplus 9 = \max\{17, 9\} = 17$$

und

$$17 \odot 9 = 17 + 9 = 26.$$

Die Zeichen \oplus und \odot erinnern euch vermutlich direkt an die gewohnten Additions- und Multiplikationszeichen, entsprechen diesen aber nicht. Dass gerade das Zeichen \oplus für das Maximum und \odot für die Addition gewählt worden ist, ist kein Zufall, wie wir später noch sehen werden. Auch wenn sie den vertrauten Operationen nicht genau entsprechen, finden sich zahlreiche Analogien zwischen der euch bekannten Struktur, bestehend aus den reellen Zahlen mit den Operationen der Addition und Multiplikation und der neu eingeführten Struktur, welche ebenfalls das Rechnen mit beliebigen reellen Zahlen ermöglicht.

Bei der uns bekannten Addition und Multiplikation nehmen die Zahlen „0“ und „1“ einen besonderen Stellenwert ein. Die „0“ ist das so genannte *neutrale Element der Addition*, das heißt, addiert man eine Zahl x mit „0“ erhält man wieder die Zahl x . Die „1“ hingegen ist das *neutrale Element der Multiplikation*, da jede Zahl x multipliziert mit „1“ wieder x ergibt. Nun stellt sich die Frage, ob wir solche Eigenschaften auch bei unseren neuen Operationen \oplus und \odot finden können. Diese Stelle eignet sich bestens dazu, das Lesen zu unterbrechen, um sich zunächst selbst darüber Gedanken zu machen und zu überlegen, welche Rechengesetze für \oplus und \odot gelten.

Wie ihr sicherlich erkannt habt, ist „0“ das neutrale Element für \odot . Dieses nennen wir e . Ein neutrales Element von \oplus muss kleiner sein als jedes Element der reellen Zahlen. Da es keine kleinste reelle Zahl gibt, erweitern wir die reellen Zahlen mit dem Symbol „ $-\infty$ “ und erhalten mit der Definition $\max\{x, -\infty\} := x$ das neutrale Element von \oplus . Wie wir später noch sehen werden, ist die Existenz eines neutralen Elements auch in den späteren Anwendungen sehr wichtig. Daher betrachten wir im Folgenden immer die Menge

$$\mathbb{R}_{\max} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

also die reellen Zahlen vereinigt mit „ $-\infty$ “. Um Platz und Schreibarbeit zu sparen, schreiben wir $\varepsilon := -\infty$ und

werden im weiteren Verlauf auf diese Notation zurückgreifen.

Die Operation \odot verhält sich wie unsere gewöhnliche Addition. Die Rechengesetze lassen sich also übertragen. Die einzige Änderung ist, dass auch ε zulässig ist. ε soll jedoch so klein sein, dass die Addition einer reellen Zahl keinen Einfluss hat, sodass gelte $\varepsilon \odot x := x \odot \varepsilon := \varepsilon$ und $\varepsilon \odot \varepsilon := \varepsilon$.

Von der Gültigkeit der folgenden Gesetze könnt ihr euch nun selbst vergewissern. Um diese Eigenschaften formal zu beweisen, wären im Folgenden eigentlich weitere Zwischenschritte sowie eine Fallunterscheidung für den Umgang mit ε notwendig. Diese haben wir an dieser Stelle weggelassen.

Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ gilt:

$$x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z.$$

Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ gilt:

$$x \odot y = y \odot x.$$

Es bleibt, sich Gedanken über die Rechenregeln für \oplus zu machen. Macht es für die Maximumbildung einen Unterschied, welchen Wert wir zuerst betrachten? Natürlich nicht. Demnach gelten auch hier sowohl das Assoziativ- als auch Kommutativgesetz.

Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ gilt:

$$x \oplus (y \oplus z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, y, z\} = \max\{\max\{x, y\}, z\} = (x \oplus y) \oplus z.$$

Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ gilt:

$$x \oplus y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \oplus x.$$

Interessant ist es nun, zu betrachten, wie sich die beiden Operationen kombiniert miteinander verhalten.

Distributivgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ gilt:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot \max\{y, z\} = x + \max\{y, z\} = \max\{x + y, x + z\} = \max\{x \odot y, x \odot z\} = (x \odot y) \oplus (x \odot z).$$

Die Gültigkeit des Distributivgesetzes ist dabei eine entscheidende Eigenschaft, die es ermöglicht, wie gewohnt auszuklammern. Hier sehen wir ein vertrautes Muster, das wir von der gewöhnlichen Addition und Multiplikation kennen. Vielleicht habt ihr euch bei der Einführung der neuen Symbole gefragt, ob es nicht intuitiver wäre \oplus für die Addition zu verwenden, da es dem ursprünglichen Pluszeichen ähnlicher ist. Die Wahl der Symbole ist jedoch ganz bewusst so erfolgt. Nur, wenn wir auf diese Weise die Symbole wählen, ist das Distributivgesetz erfüllt. Das Distributivgesetz ist nicht erfüllt, wenn wir die Operanden vertauschen. Im Allgemeinen gilt:

$$x \oplus (y \odot z) \neq (x \oplus y) \odot (x \oplus z).$$

Um zu kennzeichnen, welche Operation zuerst berechnet wird, verwenden wir Klammern. Wie schon bei der euch bekannten Addition und Multiplikation kann man aber auf einige Klammern verzichten, wenn man eine Reihenfolge festlegt, in welcher Operationen ausgeführt werden. Analog zur Multiplikation gegenüber der Ad-

dition wurde sich auf die Addition als gegenüber der Maximumbildung „stärkere“ Operation geeinigt. Aus der uns bekannten „Punkt- vor Strichrechnung“ ist „ \odot vor \oplus “ geworden.

Übung 1. Berechnet die Werte folgender Terme.

- (a) $35 \oplus 42 \oplus \varepsilon \odot 105 \odot 8 \oplus 7$
- (b) $999 \oplus (1902 \oplus 345 \oplus \varepsilon) \odot 98 \odot 22$
- (c) $37 \odot (30 \oplus 9 \odot 15) \odot 44 \oplus (3 \odot 8 \oplus 10)$
- (d) $74 \odot 26 \odot \varepsilon \odot 55 \odot (22 \oplus 36 \oplus 47) \oplus 65 \odot 8$

Kehren wir zu unserem Beispiel mit der Ampel zurück, deren Verhalten wir nun mit Hilfe eines Terms beschreiben wollen. Verallgemeinern wir die Ausgangslage, indem wir die Länge der einzelnen Prozesse mit Variablen ersetzen, erhalten wir eine Formel, die uns die Zeit bis zum Ende des Zyklus angibt. Die Zuordnung der Variablen kann aus der folgenden Abbildung abgelesen werden.

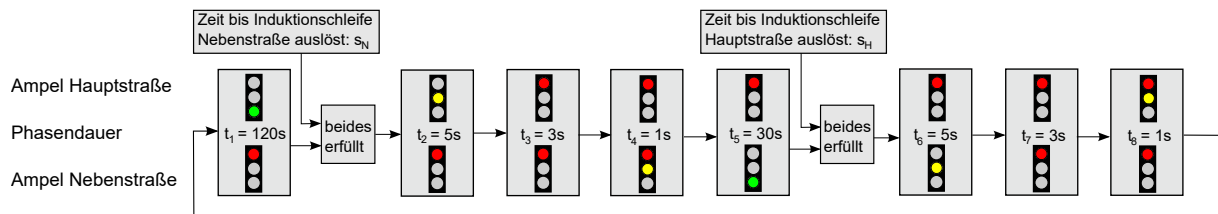


Abbildung 4: Phasen der Ampelschaltung

Der folgende Term gibt die Zeit an, die ausgehend von Phase t_1 vergeht, bis sie erneut erreicht wird:

$$t_{Zyklus} = \max\{t_1, s_N\} + t_2 + t_3 + t_4 + \max\{t_5, s_H\} + t_6 + t_7 + t_8$$

$$= (t_1 \oplus s_N) \odot t_2 \odot t_3 \odot t_4 \odot (t_5 \oplus s_H) \odot t_6 \odot t_7 \odot t_8.$$

Für unsere Ampelschaltung ergibt sich also für die Zeit, bis wieder beide Ampeln ihren Ausgangszustand t_1 annehmen:

$$t_{Zyklus} = (120 \oplus s_N) \odot 5 \odot 3 \odot 1 \odot (30 \oplus s_H) \odot 5 \odot 3 \odot 1$$

$$= 5 \odot 3 \odot 1 \odot 5 \odot 3 \odot 1 \odot (120 \oplus s_N) \odot (30 \oplus s_H)$$

$$= 18 \odot (120 \oplus s_N) \odot (30 \oplus s_H).$$

Mit Hilfe der geltenden Rechengesetze konnten wir einen kompakten Term erstellen, der die Zykluslänge in Abhängigkeit der Zeit beschreibt, die vergeht, bis die Induktionsschleifen ausgelöst werden. Beträgt die Zeit, bis jemand auf der Hauptstraße die Induktionsschleife auslöst, nachdem die Nebenstraße „grün“ hat, $s_H = 45$ Sekunden und die entsprechende Zeit, bis die Induktionsschleife auf der Nebenstraße ausgelöst wird, $s_N = 90$ Sekunden, so ergibt sich für die Zykluslänge

$$t_{Zyklus} = 18 \odot (120 \oplus 90) \odot (30 \oplus 45) = 18 \odot 120 \odot 45 = 183.$$

Es dauert also in diesem konkreten Beispiel 183 Sekunden, bis die Ampelsteuerung einmal alle Phasen durchlau-

fen hat. Da das Modell so gewählt wurde, dass die Schaltung auf Grund der Induktionsschleifen in Abhängigkeit des Verkehrs unterschiedlich schaltet, kann sich diese in jedem Durchlauf ändern.

Wir haben also für unser Anwendungsbeispiel nun ein mathematisches Modell gefunden. Die Wahl der Operatoren \odot und \oplus war dabei naheliegend, da wir auf Addition und Maximumbildung zurückgreifen mussten.

Übung 2.

Um ein besseres Verständnis für unsere neue Max-Plus-Struktur zu entwickeln, laden wir euch dazu ein, euch mit Hilfe folgender Überlegungen weiter mit den Eigenschaften unserer Struktur vertraut zu machen. Diese Aufgabe erscheint auf den ersten Blick vermutlich recht schwer. Es geht aber an dieser Stelle nicht darum, die Überlegungen formal zu beweisen, sondern ein wenig mit der Max-Plus-Algebra herumzuxperimentieren.

(a) Invertierbarkeit

Gibt es für alle Elemente a aus \mathbb{R}_{\max} ein Element b , welches ebenfalls in \mathbb{R}_{\max} liegt, sodass $a \oplus b = -\infty$?
 Gibt es für alle Elemente a aus \mathbb{R}_{\max} ein Element b , welches ebenfalls in \mathbb{R}_{\max} liegt, sodass $a \odot b = 0$?

(b) Min-Plus

Welche Art von Prozessen lassen sich mit einer „Min-Plus-Struktur“ auf $\mathbb{R}_{\min} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beschreiben, die durch

$$x \oplus y := \min\{x, y\} \quad x \odot y := x + y$$

definiert wird?

Besitzen die beiden Verknüpfungen neutrale Elemente?

Erfüllen die Verknüpfungen Kommutativität, Assoziativität und Distributivität?

Sind die Verknüpfungen invertierbar?

(c) *Potenzen* und *Potenzgesetze*

Wir kennzeichnen *Potenzen* in der Max-Plus-Struktur mit einem kleinen \odot im Exponenten, um sie von der normalen Potenzierung unterscheiden zu können. *Potenzen* mit natürlichen Zahlen n sind hier folgendermaßen definiert:

$$x^{\odot n} := \underbrace{x \odot x \odot \dots \odot x}_{n \text{ Faktoren}}$$

Prüft, welche Potenzgesetze aus unserer normalen Algebra sich auf die *Max-Plus-Potenzierung* übertragen lassen und überlegt, welcher Verknüpfung die *Max-Plus-Potenzierung* in unserer normalen Algebra entspricht.

(d) Wie können wir mit *Potenzen* von Binomen, wie zum Beispiel $(a \oplus b)^{\odot 2}$ umgehen? Gilt die erste binomische Formel noch? Findet ihr eine allgemeine Formel für $(a \oplus b)^{\odot n}$?

Wir nennen die Operanden von \odot *Faktoren*, schreiben dies aber kursiv, um sie von eigentlichen Faktoren, die Operanden der Multiplikation sind, abzugrenzen. Ebenso verhält es sich mit den kursiv geschriebenen Begriffen *Produkt* beziehungsweise *multiplizieren* und *Potenz* beziehungsweise *potenzieren*. Es handelt sich dabei um Produkte und Potenzen im Sinne der Max-Plus-Algebra. Die Struktur bestehend aus \mathbb{R}_{\max} und den beiden Verknüpfungen \oplus und \odot wird aufgrund der Eigenschaften, die sie erfüllt, als kommutativer Halbring bezeichnet. Um der Struktur einer Algebra zu entsprechen, fehlen einige Eigenschaften, unter anderem die Invertierbarkeit beider Operationen. Dennoch hat sich die Bezeichnung „Max-Plus-Algebra“ durchgesetzt und auch wir werden den Begriff in den folgenden Kapiteln verwenden.

2.2 Bestimmung des Minimums und lineare Gleichungssysteme

Interessanterweise können wir mit Hilfe unserer neuen Verknüpfungen auch in der Max-Plus-Algebra eine Formel für den kleineren zweier Werte, also das Minimum, aufstellen. Wir erhalten das Minimum von zwei Werten a und b , indem wir von der Summe beider Werte den größeren Wert abziehen. Die Bestimmung eines Maximums haben wir bereits durch \oplus definiert. Um einen Wert mit Hilfe unserer neuen Operationen abzuziehen, müssen wir ein wenig tricksen, denn wir haben bisher nur die Addition durch \odot definiert. Wie wir in der zweiten Übungsaufgabe festgestellt haben, ist \odot aber für alle reellen Zahlen invertierbar und somit ist die herkömmliche Subtraktion auch in der Max-Plus-Algebra durch Addition der Inversen möglich. Statt $a \oplus b$ zu subtrahieren, können wir die zugehörige Inverse, also die Gegenzahl $-(a \oplus b)$, addieren:

$$\min\{a, b\} := (a \odot b) \odot (-(a \oplus b)).$$

Ist eine der beiden Zahlen ε , so ist das Minimum auch ε . Wir wissen also, dass das Minimum von zwei Werten eindeutig definiert ist und wie wir es bestimmen können. Diese Definition entspricht der intuitiven Vorstellung des Minimums, denn es wird beim Vergleich zweier Zahlen die kleinere ausgewählt. Es ist auch möglich, mehr als zwei Zahlen zu vergleichen und deren Minimum zu bilden. Die Auswahl des Minimums können wir nun verwenden, um lineare Gleichungssysteme in der Max-Plus-Algebra zu lösen. Das Bestimmen der Lösungen erfolgt dabei auf eine intuitive, aber von der Bestimmung von Lösungen konventioneller linearer Gleichungssysteme abweichende Vorgehensweise. Eine allgemeine Lösungsstrategie möchten wir anhand eines Beispiels herleiten.

Wir betrachten folgendes lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4 in der Max-Plus-Algebra:

$$\left| \begin{array}{cccccc} -2 \odot x_1 & \oplus & 1 \odot x_2 & \oplus & 0 \odot x_3 & \oplus & -2 \odot x_4 & = & 3 \\ 5 \odot x_1 & \oplus & 4 \odot x_2 & \oplus & 9 \odot x_3 & \oplus & 4 \odot x_4 & = & 8 \\ 4 \odot x_1 & \oplus & 7 \odot x_2 & \oplus & 3 \odot x_3 & \oplus & 7 \odot x_4 & = & 10 \\ 0 \odot x_1 & \oplus & -2 \odot x_2 & \oplus & 1 \odot x_3 & \oplus & -5 \odot x_4 & = & 1 \end{array} \right| .$$

Übersetzt entspricht dieses Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{lcl} \max\{-2 + x_1, 1 + x_2, x_3, -2 + x_4\} & = & 3 \\ \max\{5 + x_1, 4 + x_2, 9 + x_3, 4 + x_4\} & = & 8 \\ \max\{4 + x_1, 7 + x_2, 3 + x_3, 7 + x_4\} & = & 10 \\ \max\{x_1, -2 + x_2, 1 + x_3, -5 + x_4\} & = & 1 \end{array} \right| .$$

Da in jeder Gleichung vier Summen miteinander verglichen werden und dabei das Maximum gewählt wird, müssen alle diese Summen kleiner oder gleich diesem Maximum sein. Wir stellen nun in einer Tabelle die Aussagen der einzelnen Gleichungen dar.

Tabelle 1: Aussagen des linearen Gleichungssystems

Variable Gleichung	x_1	x_2	x_3	x_4
(1)	$-2 + x_1 \leq 3$	$1 + x_2 \leq 3$	$x_3 \leq 3$	$-2 + x_4 \leq 3$
(2)	$5 + x_1 \leq 8$	$4 + x_2 \leq 8$	$9 + x_3 \leq 8$	$4 + x_4 \leq 8$
(3)	$4 + x_1 \leq 10$	$7 + x_2 \leq 10$	$3 + x_3 \leq 10$	$7 + x_4 \leq 10$
(4)	$x_1 \leq 1$	$-2 + x_2 \leq 1$	$1 + x_3 \leq 1$	$-5 + x_4 \leq 1$

Wir haben also für jede Unbekannte x_1, x_2, x_3 und x_4 vier Beschränkungen nach oben. Um all diese zu erfüllen, bestimmen wir die strengste Beschränkung, indem wir die Ungleichungen so umformen, dass die x_i isoliert auf der linken Seite der Ungleichung stehen und die Schranken dadurch vergleichbar sind. Die strengste Beschränkung einer Variablen ist das Minimum aller oberen Schranken, welches in der untersten Zeile der Tabelle bestimmt wird.

Tabelle 2: Beschränkungen der Variablen

Variable \ Gleichung	x_1	x_2	x_3	x_4
(1)	$x_1 \leq 3 - (-2) = 5$	$x_2 \leq 3 - 1 = 2$	$x_3 \leq 3$	$x_4 \leq 3 - (-2) = 5$
(2)	$x_1 \leq 3$	$x_2 \leq 4$	$x_3 \leq -1$	$x_4 \leq 4$
(3)	$x_1 \leq 6$	$x_2 \leq 3$	$x_3 \leq 7$	$x_4 \leq 3$
(4)	$x_1 \leq 1$	$x_2 \leq 3$	$x_3 \leq 0$	$x_4 \leq 6$
Minimum	$\min\{5, 3, 6, 1\} = 1$	$\min\{2, 4, 3, 3\} = 2$	$\min\{3, -1, 7, 0\} = -1$	$\min\{5, 4, 3, 6\} = 3$

Wir haben die Zeile farblich hinterlegt, aus welcher sich die strengste Beschränkung ergibt. Man sieht dabei, dass in unserem Beispiel jede der vier Gleichungen einen der Werte bestimmt.

Wählen wir unsere Variablen entsprechend dem in der Tabelle bestimmten Minimum, also $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ und $x_4 = 3$, so haben wir eine Lösung gefunden, die das Gleichungssystem erfüllt. Dies prüfen wir, indem wir die Werte in der Gleichung einsetzen:

$$\left| \begin{array}{cccccccccccc} -2 \odot 1 & \oplus & 1 \odot 2 & \oplus & 0 \odot -1 & \oplus & -2 \odot 3 & = & -1 & \oplus & 3 & \oplus & -1 & \oplus & 1 & = & 3 \\ 5 \odot 1 & \oplus & 4 \odot 2 & \oplus & 9 \odot -1 & \oplus & 4 \odot 3 & = & 6 & \oplus & 6 & \oplus & 8 & \oplus & 7 & = & 8 \\ 4 \odot 1 & \oplus & 7 \odot 2 & \oplus & 3 \odot -1 & \oplus & 7 \odot 3 & = & 5 & \oplus & 9 & \oplus & 2 & \oplus & 10 & = & 10 \\ 0 \odot 1 & \oplus & -2 \odot 2 & \oplus & 1 \odot -1 & \oplus & -5 \odot 3 & = & 1 & \oplus & 0 & \oplus & 0 & \oplus & -2 & = & 1 \end{array} \right| .$$

Die Gleichungen sind alle erfüllt. Für unser Beispiel haben wir also eine Lösung gefunden. Diese ist in unserem Fall sogar eindeutig. Auch in der Max-Plus-Algebra gibt es neben den eindeutig bestimmten linearen Gleichungssystemen auch solche, die unendlich viele Lösungen oder keine Lösung besitzen. Woran man diese speziellen Gleichungssysteme erkennt, schauen wir uns ebenfalls anhand von Beispielen an.

Das folgende lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 3 \odot x_1 & \oplus & 2 \odot x_2 & \oplus & 5 \odot x_3 & \oplus & 2 \odot x_4 & = & 5 \\ 8 \odot x_1 & \oplus & 0 \odot x_2 & \oplus & 6 \odot x_3 & \oplus & 6 \odot x_4 & = & 7 \\ 4 \odot x_1 & \oplus & -2 \odot x_2 & \oplus & -3 \odot x_3 & \oplus & -2 \odot x_4 & = & 3 \\ 0 \odot x_1 & \oplus & 2 \odot x_2 & \oplus & 1 \odot x_3 & \oplus & -2 \odot x_4 & = & 4 \end{array} \right| .$$

Wie im ersten Beispiel übersetzen wir zunächst das Gleichungssystem in unsere konventionelle Algebra. Wenn ihr mit der neuen Algebra bereits vertraut genug seid, könnt ihr euch diesen Zwischenschritt auch sparen.

$$\left| \begin{array}{l} \max\{3 + x_1, 2 + x_2, 5 + x_3, 2 + x_4\} \\ \max\{8 + x_1, x_2, 6 + x_3, 6 + x_4\} \\ \max\{4 + x_1, -2 + x_2, -3 + x_3, -2 + x_4\} \\ \max\{x_1, 2 + x_2, 1 + x_3, -2 + x_4\} \end{array} \right. \begin{array}{l} = 5 \\ = 7 \\ = 3 \\ = 4 \end{array}$$

Wir stellen die Aussagen der Gleichungen erneut als Ungleichungen dar, welche wir spaltenweise für die Variablen anordnen.

Tabelle 3: Aussagen des linearen Gleichungssystems

Gleichung \ Variable	x_1	x_2	x_3	x_4
(1)	$3 + x_1 \leq 5$	$2 + x_2 \leq 5$	$5 + x_3 \leq 5$	$2 + x_4 \leq 5$
(2)	$8 + x_1 \leq 7$	$x_2 \leq 7$	$6 + x_3 \leq 7$	$6 + x_4 \leq 7$
(3)	$4 + x_1 \leq 3$	$-2 + x_2 \leq 3$	$-3 + x_3 \leq 3$	$-2 + x_4 \leq 3$
(4)	$x_1 \leq 4$	$2 + x_2 \leq 4$	$1 + x_3 \leq 4$	$-2 + x_4 \leq 4$

Anschließend isolieren wir unsere Variablen erneut und bestimmen die strengste Beschränkung.

Tabelle 4: Beschränkungen der Variablen

Gleichung \ Variable	x_1	x_2	x_3	x_4
(1)	$x_1 \leq 5 - 3 = 2$	$x_2 \leq 5 - 2 = 3$	$x_3 \leq 5 - 5 = 0$	$x_4 \leq 5 - 2 = 3$
(2)	$x_1 \leq -1$	$x_2 \leq 7$	$x_3 \leq 1$	$x_4 \leq 1$
(3)	$x_1 \leq -1$	$x_2 \leq 5$	$x_3 \leq 6$	$x_4 \leq 5$
(4)	$x_1 \leq 4$	$x_2 \leq 2$	$x_3 \leq 3$	$x_4 \leq 6$
Minimum	$\min\{2, -1, -1, 4\} = -1$	$\min\{3, 7, 5, 2\} = 2$	$\min\{0, 1, 6, 3\} = 0$	$\min\{3, 1, 5, 6\} = 1$

In dieser Tabelle fällt direkt auf, dass in der zweiten Zeile zwei Einträge einer strengsten Beschränkung entsprechen. Wir überprüfen erneut, ob die Wahl der Variablen durch $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$ und $x_4 = 1$ eine Lösung des Gleichungssystems darstellt.

$$\left| \begin{array}{cccccccccccc} 3 \odot -1 \oplus & 2 \odot 2 \oplus & 5 \odot 0 \oplus & 2 \odot 1 = & 2 \oplus & 4 \oplus & 5 \oplus & 3 = & 5 \\ 8 \odot -1 \oplus & 0 \odot 2 \oplus & 6 \odot 0 \oplus & 6 \odot 1 = & 7 \oplus & 2 \oplus & 6 \oplus & 7 = & 7 \\ 4 \odot -1 \oplus & -2 \odot 2 \oplus & -3 \odot 0 \oplus & -2 \odot 1 = & 3 \oplus & 0 \oplus & -3 \oplus & -1 = & 3 \\ 0 \odot -1 \oplus & 2 \odot 2 \oplus & 1 \odot 0 \oplus & -2 \odot 1 = & -1 \oplus & 4 \oplus & 1 \oplus & -1 = & 4 \end{array} \right|$$

Auch in diesem Beispiel erfüllt die Lösung, die wir bestimmt haben, alle Gleichungen. Für die zweite Gleichung haben wir aber zwei Vorschriften, für die diese Gleichung erfüllt wäre. Wählen wir $x_1 = -1$, so ist dadurch bereits die zweite und dritte Gleichung wahr, sofern x_2, x_3 und x_4 nicht größer als ihre oberen Schranken sind. Wir müssen für die Lösung der zweiten Gleichung also nicht mehr $x_4 = 1$ einsetzen, sondern haben unendlich viele Werte $x_4 \leq 1$, die die Gleichung erfüllen.

Zuletzt betrachten wir an einem Beispiel den Fall, dass keine Lösung für unser Gleichungssystem existiert.

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 2 \odot x_1 \oplus & 1 \odot x_2 \oplus & 2 \odot x_3 \oplus & 4 \odot x_4 = & 7 \\ 0 \odot x_1 \oplus & -5 \odot x_2 \oplus & 2 \odot x_3 \oplus & -3 \odot x_4 = & 3 \\ 2 \odot x_1 \oplus & -1 \odot x_2 \oplus & 5 \odot x_3 \oplus & -4 \odot x_4 = & 4 \\ -1 \odot x_1 \oplus & 2 \odot x_2 \oplus & 3 \odot x_3 \oplus & 1 \odot x_4 = & 6 \end{array} \right|$$

Wir erstellen erneut nach der selben Vorgehensweise die beiden Tabellen, um die Beschränkungen der Variablen zu vergleichen.

Tabelle 5: Aussagen des linearen Gleichungssystems

Variable \ Gleichung	x_1	x_2	x_3	x_4
(1)	$2 + x_1 \leq 7$	$1 + x_2 \leq 7$	$2 + x_3 \leq 7$	$4 + x_4 \leq 7$
(2)	$x_1 \leq 3$	$-5 + x_2 \leq 3$	$2 + x_3 \leq 3$	$-3 + x_4 \leq 3$
(3)	$2 + x_1 \leq 4$	$-1 + x_2 \leq 4$	$5 + x_3 \leq 4$	$-4 + x_4 \leq 4$
(4)	$-1 + x_1 \leq 6$	$2 + x_2 \leq 6$	$3 + x_3 \leq 6$	$1 + x_4 \leq 6$

Tabelle 6: Beschränkungen der Variablen

Variable \ Gleichung	x_1	x_2	x_3	x_4
(1)	$x_1 \leq 5$	$x_2 \leq 6$	$x_3 \leq 5$	$x_4 \leq 3$
(2)	$x_1 \leq 3$	$x_2 \leq 8$	$x_3 \leq 1$	$x_4 \leq 6$
(3)	$x_1 \leq 2$	$x_2 \leq 5$	$x_3 \leq -1$	$x_4 \leq 8$
(4)	$x_1 \leq 7$	$x_2 \leq 4$	$x_3 \leq 3$	$x_4 \leq 5$
Minimum	$\min\{5, 3, 2, 7\} = 2$	$\min\{6, 8, 5, 4\} = 4$	$\min\{5, 1, -1, 3\} = -1$	$\min\{3, 6, 8, 5\} = 3$

Hier sehen wir, dass in der Zeile der zweiten Gleichung kein Eintrag hervorgehoben wurde. Dies ist der Fall, da es für alle Variablen strengere Beschränkungen gibt als diejenigen aus dieser Gleichung. Dies führt aber nun dazu, dass wir alle Werte kleiner wählen als von der Gleichung vorgegeben. Dadurch ist jedoch das Maximum der Summen aus der zweiten Gleichung nicht mehr drei und somit die Gleichung nicht erfüllt.

Wählen wir die Variablen nach üblicher Vorgehensweise, also $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -1$ und $x_4 = 3$, so erhalten wir eingesetzt für die zweite Zeile

$$2 \oplus -5 \odot 4 \oplus 2 \odot -1 \oplus -3 \odot 3 = 2 \oplus -1 \oplus 1 \oplus 0 = 2 \neq 3.$$

Da die zweite Gleichung nicht erfüllt werden kann, während die anderen drei Gleichungen erfüllt sind, gibt es keine Lösung für dieses Gleichungssystem.

In der folgenden Übung könnt ihr euch selbst an der Lösung eines Gleichungssystems versuchen. Die Tabellen, die wir für die Beispiele erstellt haben, sind übersichtlich und beugen Flüchtigkeitsfehlern vor. Wenn ihr aber das Prinzip der Bestimmung einer Lösung verstanden habt, könnt ihr ein solches Gleichungssystem deutlich schneller lösen, wenn ihr einige der Schritte im Kopf durchführt und nicht alles verschriftlicht.

Übung 3.

Löst das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 4 \odot x_1 \oplus 5 \odot x_2 \oplus 1 \odot x_3 = 6 \\ 2 \odot x_1 \oplus 7 \odot x_2 \oplus 3 \odot x_3 = 7 \\ 4 \odot x_1 \oplus 9 \odot x_2 \oplus 1 \odot x_3 = 8 \end{cases}$$

Abschließend sind im folgenden Merkkasten die wichtigsten Definitionen, Formeln und die Strategie zum Lösen linearer Gleichungssysteme in der Max-Plus-Algebra zusammengefasst.

Merkkasten zu Kapitel 2.

Zusammenfassung der wichtigsten Informationen aus dem Kapitel.

- $x \oplus y := \max\{x, y\}$
 - $x \odot y := x + y$
 - *neutrales Element* zu \oplus : $\varepsilon := -\infty$
 - *neutrales Element* zu \odot : $e := 0$
 - Für \oplus und \odot gelten Assoziativgesetz, Kommutativgesetz und Distributivgesetz.
 - \oplus ist nicht invertierbar und \odot ist nur für reelle Zahlen invertierbar.
 - $\min\{a, b\} = (a \odot b) \odot (-(a \oplus b))$
 - Für lineare Gleichungssysteme in der Max-Plus-Algebra gibt es drei Möglichkeiten: Sie sind eindeutig lösbar, sie besitzen unendlich viele Lösungen oder sie besitzen keine Lösung. Falls es eine **Lösung** gibt, so entspricht diese den **strengsten Beschränkungen der isolierten Variablen**. Diese lassen sich am einfachsten mit Hilfe einer Tabelle (oder tabellenartiger Notation) bestimmen.
- 1. Fall:** Bei jeder Zeile entspricht genau ein Eintrag einer strengsten Beschränkung.
→ Eindeutige Lösung
 - 2. Fall:** Jede Zeile enthält eine strengste Beschränkung, wobei mindestens eine Zeile mehrere strengste Beschränkungen enthält.
→ Unendlich viele Lösungen
 - 3. Fall:** Es gibt mindestens eine Zeile, die keine strengste Beschränkung enthält.
→ Keine Lösung

3 Max-Plus als Fahrplan-Algebra

Nachdem ihr nun mit der Max-Plus-Struktur vertraut seid, möchten wir uns mit ihren Anwendungsmöglichkeiten bei der Erstellung von Fahrplänen auseinandersetzen. Dazu schauen wir uns für ein einfaches Beispiel an, wie Sachverhalte in der Max-Plus-Algebra modelliert werden und welche Informationen wir auf diese Weise ablesen können. Wir möchten uns damit beschäftigen, von welchen Verbindungen die kürzest mögliche Taktzeit abhängt, wie wir regelmäßige Abfahrtszeiten erhalten und wie sich einzelne Verspätungen auf ein gesamtes Netz auswirken können.

3.1 Analyse eines Verkehrsnetzes

Dafür betrachten wir lediglich die drei Stationen Bad Neuenahr, Remagen und Linz, die folgendermaßen miteinander in Verbindung stehen: Es gibt eine Buslinie, die von Bad Neuenahr nach Remagen und wieder zurück fährt. Für diese Verbindung sind zwei Busse im Einsatz, wobei der eine Bus von Bad Neuenahr startet und der andere in Remagen. Der Weg von Bad Neuenahr nach Remagen dauert 23 Minuten. Von Remagen nach Bad Neuenahr fährt der Bus auf Grund der Verkehrsregelung eine etwas andere Route und benötigt 25 Minuten. Dabei sind der Einfachheit halber Umsteigezeiten bereits in der Fahrzeit enthalten. Von Remagen nach Linz und zurück fährt eine Fähre, deren Fahrzeit inklusive Umsteigezeit für beide Richtungen 8 Minuten beträgt. Auch für diese Verbindung sind zwei Fähren im Einsatz. Eine Fähre startet von Remagen und eine Fähre startet von der Linzer Anlegestelle. In Linz gibt es eine Buslinie, die eine Schleife innerhalb von Linz fährt und nach 15 Minuten wieder abfahrtsbereit ist. Auch von Bad Neuenahr startet eine Busschleife durch die Stadt, welche nach 22 Minuten wieder vom Busbahnhof, von welchem auch der Bus Richtung Remagen fährt, starten kann.

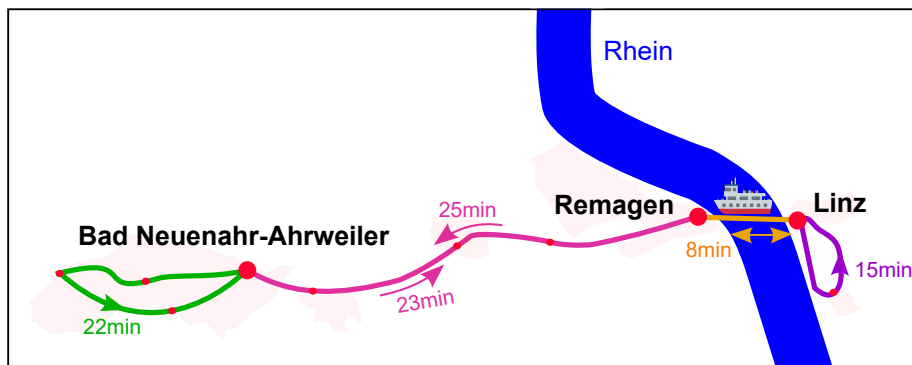


Abbildung 5: Streckennetz Bad Neuenahr - Remagen - Linz

Nun sollen die jeweiligen Abfahrten an einer Station gleichzeitig erfolgen, sodass zuvor die Möglichkeit zum Umstieg besteht. Die beiden Busse, die in Bad Neuenahr starten, fahren also gleichzeitig ab. Der Bus von Remagen nach Bad Neuenahr startet zeitgleich mit der Fähre von Remagen nach Linz und die Fähre von Linz nach Remagen gleichzeitig mit der Bustour in Linz.

Zur Veranschaulichung wollen wir die Informationen in einem gerichteten Graphen darstellen. Gerichtete Graphen bestehen aus sogenannten Knoten, die durch Kanten verbunden sind. Die Kanten haben eine feste Richtung und ein Gewicht, welches in unserem Fall den Fahrtauern von einem Ort zu einem anderen entsprechen. Die Knoten stehen für die Stationen, die angefahren werden. Dabei wird Bad Neuenahr als S_1 , Remagen als S_2 und Linz als S_3 bezeichnet.

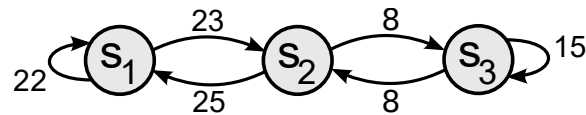


Abbildung 6: Graph des Streckennetzes Bad Neuenahr - Remagen - Linz

Die Busse und die Fähren sollen zunächst alle zeitgleich starten. Der Zeitpunkt der jeweils „nullten“ Abfahrt an den Stationen ist also nach null Minuten. Wir bezeichnen diese als „nullte“ Abfahrt, um deutlich zu machen, dass es sich hier um Abfahrtszeiten handelt, die nicht abhängig von der Ankunftszeit vorheriger Busse oder Fähren sind. Als erste Abfahrt bezeichnen wir die nächste Abfahrt von der jeweiligen Station, die erst erfolgen kann, wenn beide Transportmittel an dieser eingetroffen sind.

Tabelle 7: Zeitpunkte der „nullten“ Abfahrt der Stationen

Station	Zeitpunkt der „nullten“ Abfahrt
S_1	0 min
S_2	0 min
S_3	0 min

Zur vereinfachten Darstellung der Abfahrtszeiten notieren wir diese Informationen in einem sogenannten Vektor. Wir bezeichnen dafür die „nullte“ Abfahrtszeit an der Station S_i mit $x_i(0)$, in unserem Fall gilt also $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$. In unserem Vektor fassen wir jetzt die einzelnen Abfahrtszeiten zusammen.

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da wir drei Stationen haben, hat unser Vektor somit auch drei Einträge. Allgemein notieren wir im Vektor $x(k)$ die k -ten Abfahrtszeiten an den einzelnen Stationen.

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

Wir wollen uns nun anschauen, wann die Busse das nächste Mal an den einzelnen Stationen abfahren können. Dazu schauen wir uns zunächst an, wann die Transportmittel jeweils an den Zielorten eintreffen. Liegt keine direkte Verbindung zwischen zwei Orten vor, so wird ε als Ankunftszeit eingetragen.

Tabelle 8: Ankunftszeiten an den Stationen nach der „nullten“ Abfahrt

kommend aus \ Ankunft in	S_1	S_2	S_3	späteste Ankunft
S_1	22 min	25 min	ε	25 min
S_2	23 min	ε	8 min	23 min
S_3	ε	8 min	15 min	15 min

Die rechte Spalte der Tabelle stellt die jeweils späteste Ankunft eines Transportmittels an den Stationen dar. Diese ist für die nächste Abfahrtszeit von Interesse, da die Transportmittel zwecks Umstiegsmöglichkeit erst von einer Station starten können, wenn alle Transportmittel, die diese Station anfahren, eingetroffen sind.

Der Zeitpunkt der ersten Abfahrt an einer Station entspricht also dem Zeitpunkt der spätesten Ankunft eines synchronisierten Busses oder einer Fähre.

Tabelle 9: Zeitpunkte der ersten Abfahrten an den Stationen

Station	Zeitpunkt der ersten Abfahrt
S_1	25 min
S_2	23 min
S_3	15 min

Die Zeiten der ersten Abfahrt an den Stationen können im Vektor $x(1)$ dargestellt werden.

$$x(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Allgemein können wir die $(k+1)$ -te Abfahrt einer Station abhängig von den k -ten Abfahrten notieren. Abfahrten von Station S_1 erfolgen, wenn sowohl der Bus, der die Schleife in Bad Neuenahr fährt, als auch der Bus, welcher aus Remagen eintrifft, angekommen sind. Wir können also die Abfahrt in Bad Neuenahr abhängig von den vorherigen Abfahrten von S_1 und S_2 darstellen:

$$x_1(k+1) = \max\{x_1(k) + 22, x_2(k) + 25\}.$$

Analog können wir auch die $(k+1)$ -te Abfahrten von S_2 und S_3 formulieren:

$$x_2(k+1) = \max\{x_1(k) + 23, x_3(k) + 8\}$$

$$x_3(k+1) = \max\{x_2(k) + 8, x_3(k) + 15\}.$$

Diese drei Gleichungen können wir nun auch in einem Vektor zusammenfassen und die Operationen der Maximierung und der Addition mit unseren neu eingeführten Symbolen ersetzen.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \max\{x_1(k) + 22, x_2(k) + 25\} \\ \max\{x_1(k) + 23, x_3(k) + 8\} \\ \max\{x_2(k) + 8, x_3(k) + 15\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(k) \odot 22 \oplus x_2(k) \odot 25 \\ x_1(k) \odot 23 \oplus x_3(k) \odot 8 \\ x_2(k) \odot 8 \oplus x_3(k) \odot 15 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieses Vektors lassen sich nun die zweiten Abfahrtszeiten ganz leicht berechnen.

$$x(2) = \begin{pmatrix} x_1(1) \odot 22 \oplus x_2(1) \odot 25 \\ x_1(1) \odot 23 \oplus x_3(1) \odot 8 \\ x_2(1) \odot 8 \oplus x_3(1) \odot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \odot 22 \oplus 23 \odot 25 \\ 25 \odot 23 \oplus 15 \odot 8 \\ 23 \odot 8 \oplus 15 \odot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 48 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Auf die gleiche Weise können nun auch die weiteren Abfahrtszeiten bestimmt werden.

$$x(3) = \begin{pmatrix} 73 \\ 71 \\ 56 \end{pmatrix} \quad x(4) = \begin{pmatrix} 96 \\ 96 \\ 79 \end{pmatrix} \quad x(5) = \begin{pmatrix} 121 \\ 119 \\ 104 \end{pmatrix} \quad x(6) = \begin{pmatrix} 144 \\ 144 \\ 127 \end{pmatrix}$$

Um den Fahrplan besser analysieren zu können, tragen wir die Einträge der einzelnen Vektoren spaltenweise in eine Tabelle ein:

Tabelle 10: Abfahrtszeiten an den Stationen bei gleichzeitigem Start der Transportmittel

Station \ Abfahrt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1	0	25	48	73	96	121	144	169	192	217	240	265	288	313	336
S_2	0	23	48	71	96	119	144	167	192	215	240	263	288	311	336
S_3	0	15	31	56	79	104	127	152	175	200	223	248	271	296	319

Somit haben wir bereits einen möglichen Fahrplan gefunden. Die Abfahrten an den Stationen können nach diesen berechneten Zeiten erfolgen. Es fällt aber auf, dass die Zeit zwischen zwei Abfahrten nicht gleich ist. Die zeitliche Differenz zwischen der j -ten und der $(j + 1)$ -ten Abfahrt sind in folgender Tabelle in der $(j + 1)$ -ten Spalte eingetragen.

Tabelle 11: Zeit zwischen zwei Abfahrten an den Stationen bei gleichzeitigem Start der Transportmittel

Station \ Abfahrt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1		25	23	25	23	25	23	25	23	25	23	25	23	25	23
S_2		23	25	23	25	23	25	23	25	23	25	23	25	23	25
S_3		15	16	25	23	25	23	25	23	25	23	25	23	25	23

Wir sehen, dass sich die Abfahrtszeiten einpendeln und der Abstand abwechselnd 23 und 25 Minuten beträgt. Für einen möglichst regelmäßigen Fahrplan wäre es gut, wenn zwei aufeinanderfolgende Abfahrten immer im selben Abstand erfolgen würden. Um einen solchen Zustand zu erreichen ändern wir die Zeiten der „nullten“ Abfahrt. Wir lassen zunächst nur die Transportmittel an der Station S_3 , also in Linz losfahren. Erst 16 Minuten danach, sollen Bus und Fähre an Station S_2 starten, bevor eine weitere Minute später die beiden Busse auch an der Station S_1 in Bad Neuenahr losfahren dürfen. Die „nullten“ Abfahrtszeiten können wir dann im folgenden Vektor darstellen:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Zahlen wirken zunächst einmal sehr willkürlich. Wir werden später sehen, wieso wir gerade diese ausgewählt haben. Wenn wir nun aber die Zeiten anschauen sehen wir, dass der Abstand zwischen zwei Abfahrten nun immer bei 24 Minuten liegt, wie in den folgenden beiden Tabellen dargestellt ist.

Tabelle 12: Abfahrtszeiten an den Stationen bei versetztem Start der Transportmittel

Station \ Abfahrt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1	17	41	65	89	113	137	161	185	209	233	257	281	305	329	353
S_2	16	40	64	88	112	136	160	184	208	232	256	280	304	328	352
S_3	0	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336

Tabelle 13: Zeit zwischen zwei Abfahrten an den Stationen bei versetztem Start der Transportmittel

Abfahrt Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1		24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
S_2		24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
S_3		24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24

Wir haben nun einen für unsere Bedingungen optimalen Fahrplan erstellt. Die Frequenz der Abfahrten können wir ohne den Einsatz von weiteren Transportmitteln nicht erhöhen, da die Schleife zwischen Remagen und Bad Neuenahr am längsten dauert (48 Minuten) und zwei Busse auf der Strecke unterwegs sind. Die Abfahrten können also, wenn sie regelmäßig sein sollen, nicht häufiger als alle $\frac{48}{2} = 24$ Minuten erfolgen. Da die Schleife zwischen Remagen und Bad Neuenahr ausschlaggebend für die Taktzeit ist, nennen wir den Zyklus im Graphen auch *kritischen Zyklus*.

Übung 4.

Stellt Überlegungen an, welche Folgen die Verspätungen einzelner Transportmittel auf den gesamten Fahrplan haben. Wie und wie lange wirken sich Verspätungen auf die jeweiligen Linien aus? Probiert verschiedene Verspätungsszenarien aus. Orientiert euch dabei am Fahrplan, welcher aus Tabelle 12 abgelesen werden kann.

Wie wir bereits erkannt haben, ist die mögliche Frequenz an Abfahrten abhängig von der Schleife, die in Relation zur Anzahl an der sich darauf befindenden Transportmitteln, die größte Fahrzeit besitzt. Der *kritische Zyklus* ist auch relevant für die Überlegung, in welcher Schleife ein weiteres Transportmittel eingesetzt werden sollte, um einen geringeren zeitlichen Abstand zwischen zwei Abfahrten zu erhalten. In unserem Fall können wir die Abfahrtfrequenz nur erhöhen, indem wir einen weiteren Bus auf der Schleife zwischen Bad Neuenahr und Remagen fahren lassen. Den Startpunkt dieses Busses legen wir für die Beschreibung unseres neu erhaltenen Netzes fest auf Remagen. Da wir die Startzeiten noch nicht versetzt haben, erfolgen die „nullten“ und erste Abfahrt von Remagen in Richtung Bad Neuenahr gleichzeitig. Die erste Abfahrt in Bad Neuenahr kann erfolgen, wenn die Busse aus Remagen ankommen. Der Bus für die Bad Neuenahr-Schleife und einer der beiden Busse die aus Remagen gekommen sind fahren zeitgleich los. Der zweite Bus aus Remagen wartet in Bad Neuenahr, bis der Bus von der Bad Neuenahr-Schleife zurückkehrt, um zeitgleich abzufahren. Dadurch kann die zweite Abfahrt in Bad Neuenahr bereits unmittelbar nach der Rückkehr des Busses, der die Bad Neuenahr-Schleife gefahren ist, erfolgen. Der Zeitpunkt der zweiten Abfahrt lässt sich also beschreiben durch $\max\{x_1(1) + 22, x_2(0) + 25\}$. Die zweite Abfahrt von S_1 erfolgt offensichtlich unmittelbar dann, wenn der Bus auf der Bad Neuenahr-Schleife zurückkehrt, da der Bus aus Remagen bereits mit dem parallel gestarteten Bus angekommen ist und schon in Bad Neuenahr wartet. Wir beschreiben die zweite Abfahrt von S_1 dennoch als Maximum der beiden Ankünfte, um dies auf eine allgemeine Formel zu übertragen. Da die Busse immer warten, bis sie zeitgleich mit einem weiteren Bus von einer Station abfahren können, ist es nicht möglich, dass ein Bus einen anderen überholt. Allgemein findet also die $(k + 1)$ -te Abfahrt in Bad Neuenahr statt, wenn der Bus der Bad Neuenahr-Schleife nach der k -ten Abfahrt zurückgekehrt ist und die Ankunft eines zur $(k - 1)$ -ten Abfahrtszeit in Remagen gestarteten Busses erfolgt ist. Für $k > 0$ lautet die neue Gleichung für $x(k + 1)$ nun:

$$x(k + 1) = \begin{pmatrix} \max\{x_1(k) + 22, x_2(k - 1) + 25\} \\ \max\{x_1(k) + 23, x_3(k) + 8\} \\ \max\{x_2(k) + 8, x_3(k) + 15\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(k) \odot 22 \oplus x_2(k - 1) \odot 25 \\ x_1(k) \odot 23 \oplus x_3(k) \odot 8 \\ x_2(k) \odot 8 \oplus x_3(k) \odot 15 \end{pmatrix}.$$

Wie wir im Vektor sehen, hängt die $(k + 1)$ -te Abfahrtszeit von S_1 nicht nur von der k -ten, sondern auch von einer $(k - 1)$ -ten Abfahrtszeit ab. Um die $(k + 1)$ -te Abfahrtszeit zu bestimmen, müssen also sowohl die k -te als auch die $(k - 1)$ -te Abfahrtszeit bekannt sein. Damit wir von den Zeiten der k -ten Abfahrten aber immer auf die Zeiten der $(k + 1)$ -ten Abfahrten schließen können, möchten wir eine Gleichung für $x(k + 1)$ aufstellen, deren Einträge alle abhängig von $x(k)$ sind. Dies können wir erreichen, indem wir eine virtuelle Station S_4 einführen und deren k -te Abfahrt als $(k - 1)$ -ten Abfahrt in S_2 definieren. Die Fahrzeit zwischen S_2 und S_4 beträgt null Minuten, da dieser Halt nur virtuell als Knoten, von dem ein weiterer Bus startet, eingeführt wurde. Die beiden Stationen S_2 und S_4 befinden sich also am gleichen Ort, die Abfahrten können nun aber unterschieden werden. An den Fahrzeiten für S_4 nach S_1 ändert sich dabei nichts und da die Fahrzeit zwischen S_2 und S_4 null ist, verändert sich durch die zusätzliche Station auch nicht die Fahrzeit von S_2 nach S_1 .

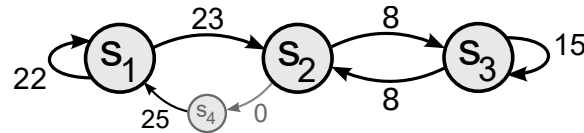


Abbildung 7: Graph des Streckennetzes mit zusätzlichem Bus

Wenn wir uns den Graphen ansehen, sehen wir, dass die virtuelle Station so gewählt wurde, dass

$$x(k + 1) = \begin{pmatrix} x_1(k) \odot 22 \oplus x_4(k) \odot 25 \\ x_1(k) \odot 23 \oplus x_3(k) \odot 8 \\ x_2(k) \odot 8 \oplus x_3(k) \odot 15 \\ x_2(k) \odot 0 \end{pmatrix}.$$

Den neuen Fahrplan und die Zeit zwischen zwei Abfahrten stellen wir in den folgenden Tabellen dar.

Tabelle 14: Abfahrtszeit der einzelnen Stationen mit virtueller Station S_4 bei gleichzeitigem Start

Abfahrt \ Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1	0	25	47	69	91	113	135	157	179	201	223	245	267	289	311
S_2	0	23	48	70	92	114	136	158	180	202	224	246	268	290	312
S_3	0	15	30	56	78	100	122	144	166	188	210	232	254	276	298
S_4	0	0	23	48	70	92	114	136	158	180	202	224	246	268	290

Tabelle 15: Zeiten zwischen zwei Abfahrten an den Stationen mit virtueller Station S_4 bei versetztem Start

Abfahrt \ Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1	0	25	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
S_2	0	23	25	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
S_3	0	15	16	25	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
S_4	0	22	1	25	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22

Auch hier haben wir regelmäßige Abfahrtszeiten, deren Abstand nun ab der vierten Abfahrt 22 Minuten beträgt, was auf unseren neuen kritischen Zyklus zurückzuführen ist. Denn dieser ist nun die Bad Neuenahr-Schleife, deren Fahrtdauer 22 Minuten beträgt. Eine höhere Frequenz können wir also nicht erreichen, ohne ein neues Transportmittel hinzuzufügen. Eine frühestmögliche Einhaltung der Taktzeit alle 22 Minuten erhalten wir, wenn wir erneut die Startzeiten ändern. Dazu lassen wir zunächst den Bus an der virtuellen Station S_4 starten, an

der Station S_3 fahren die Verkehrsmittel nach 8 Minuten, an S_1 nach 21 Minuten und an S_2 nach 22 Minuten ab. Damit ergeben sich die folgenden Zeiten.

Tabelle 16: Abfahrtszeiten der einzelnen Stationen mit virtueller Station S_4 bei versetztem Start

Abfahrt Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1	21	43	65	87	109	131	153	175	197	219	241	263	285	307	329
S_2	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330
S_3	8	30	52	74	96	118	140	162	184	206	228	250	272	294	316
S_4	0	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308

Nun wird bereits ab der ersten Abfahrt die Taktzeit von 22 Minuten eingehalten. Auch für das neue Netz bietet es sich an, dass ihr euch kurz Gedanken um die Auswirkungen von Stau und Verspätungen macht.

Wir können wieder die Frequenz der Abfahrten erhöhen, indem wir ein weiteres Transportmittel in die Bad Neuenahr-Schleife des *kritischen Zyklus* hinzufügen. Nehmen wir den neuen Bus, der in S_1 startet und endet, in unsere Gleichung für $x(k+1)$ auf, so erhalten wir nun für $k > 0$:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \max\{x_1(k-1) + 22, x_4(k) + 25\} \\ \max\{x_1(k) + 23, x_3(k) + 8\} \\ \max\{x_2(k) + 8, x_3(k) + 15\} \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(k-1) \odot 22 \oplus x_4(k) \odot 25 \\ x_1(k) \odot 23 \oplus x_3(k) \odot 8 \\ x_2(k) \odot 8 \oplus x_3(k) \odot 15 \\ x_2(k) \end{pmatrix}.$$

Auch für diese Gleichung führen wir einen neuen virtuellen Halt S_5 ein, dessen k -te Abfahrt der $(k-1)$ -ten Abfahrt von S_1 entspricht.

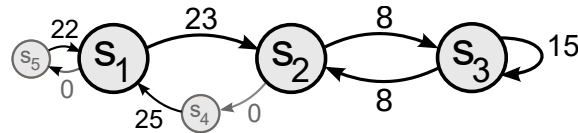


Abbildung 8: Graph des Streckennetzes mit zwei zusätzlichen Bussen

Wir erhalten erneut einen Vektor, in welchem die $(k+1)$ -te Abfahrtszeit nur von der unmittelbar vorherigen k -ten Abfahrtszeit abhängt:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} x_5(k) \odot 22 \oplus x_4(k) \odot 25 \\ x_1(k) \odot 23 \oplus x_3(k) \odot 8 \\ x_2(k) \odot 8 \oplus x_3(k) \odot 15 \\ x_2(k) \\ x_1(k) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieses neuen Busses können die Stationen mit einer höheren Frequenz angefahren werden und wir erhalten als neuen Fahrplan, wenn wir an allen Stationen die Verkehrsmittel sofort starten lassen:

Tabelle 17: Abfahrtszeiten der einzelnen Stationen mit virtuellen Stationen S_4 und S_5 bei gleichzeitigem Start

Abfahrt Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1	0	25	25	48	73	73	96	121	121	144	169	169	192	217	217
S_2	0	23	48	48	71	96	96	119	144	144	167	192	192	215	240
S_3	0	15	31	56	71	86	104	119	134	152	167	182	200	215	230
S_4	0	0	23	48	48	71	96	96	119	144	144	167	192	192	215
S_5	0	0	25	25	48	73	73	96	121	121	144	169	169	192	217

Auffällig bei diesem Fahrplan ist, dass es bei den Stationen S_1 und S_2 dazu kommt, dass zwei aufeinanderfolgende Abfahrten gleichzeitig erfolgen. Bei S_1 erfolgen beispielsweise die ersten und zweiten Abfahrten nach 25 Minuten. Dies würde im Kontext bedeuten, dass zwei Busse direkt hintereinander her fahren. Das führt zwar zu einer höheren Durchschnittsfrequenz an Abfahrten, ist aber durch die Unregelmäßigkeit der Abfahrten keine wirkliche Verbesserung für unseren Fahrplan. Im Durchschnitt liegen zwischen zwei Abfahrten, wie die folgende Tabelle der zeitlichen Differenzen zwischen zwei Abfahrten zeigt, nun aber 16 Minuten.

Tabelle 18: Zeiten zwischen zwei Abfahrten mit virtuellen Stationen S_4 und S_5 bei gleichzeitigem Start

Abfahrt Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1		25	0	23	25	0	23	25	0	23	25	0	23	25	0
S_2		23	25	0	23	25	0	23	25	0	23	25	0	23	25
S_3		15	16	25	15	15	18	15	15	18	15	15	18	15	15

Der neu entstandene Fahrplan kann nun erneut analysiert werden, um weiter optimiert werden zu können. Dabei können wir uns wie zuvor überlegen, welche Abfahrtszeiten für einen regelmäßigen Fahrplan am sinnvollsten wären und wo ein weiteres Transportmittel hinzuzufügen wäre, um die Häufigkeit der Abfahrten zu erhöhen. Die folgenden Startzeiten führen, wie ihr selbst überprüfen könnt, zu einem Fahrplan, bei dem alle 16 Minuten von jeder Station Abfahrten erfolgen.

Tabelle 19: Abfahrtszeiten der einzelnen Stationen mit virtuellen Stationen S_4 und S_5 bei versetztem Start

Abfahrt Station	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_1	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240
S_2	23	39	55	71	87	103	119	135	151	167	183	199	215	231	247
S_3	15	31	47	63	79	95	111	127	143	159	175	191	207	223	239
S_4	7	23	39	55	71	87	103	119	135	151	167	183	199	215	231
S_5	0	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224

Wir haben bereits erkannt, dass die optimale Taktung eines Verkehrsnetzes durch passend gewählte Startzeiten zu erreichen ist. Nun stellt sich für euch sicherlich die Frage, wie wir diese Startzeiten geschickt bestimmen können. Um dafür eine Strategie zu entwickeln, benötigen wir zunächst noch ein wenig Wissen zur Darstellung unseres Netzes als Matrix und Matrizenrechnung in der Max-Plus-Algebra. Dieses thematisieren wir im folgenden Unterkapitel und beschreiben, wie wir die optimalen Taktzeiten bestimmen können. Zuvor dürft ihr anhand der nächsten Aufgabe aber prüfen, ob ihr die bisherigen anwendungsbezogenen Inhalte verstanden habt.

Übung 5.

Betrachtet den aktuellen Fahrplan und überlegt euch, welche Schleife nun unserem *kritischen Zyklus* entspricht, also das entscheidende Element des Netzes ist, welches die Frequenz der Abfahrten bestimmt. Wie wirkt sich das Hinzufügen eines Busses beziehungsweise einer Fähre auf die verschiedenen Schleifen aus?

Merkkasten zu Kapitel 3.1.

Zusammenfassung der wichtigsten Informationen aus dem Kapitel.

- Ein gerichteter Graph setzt sich aus Knoten und gewichteten Kanten, die die Knoten miteinander verbinden, zusammen.
- Knoten können im Fahrplankontext als Stationen interpretiert werden und die Kantengewichte als Fahrzeit von der Station von der die Kante ausgeht zu der Station zu der die Kante hinführt.
- Der Vektor $x(k)$ beschreibt im Eintrag $x_i(k)$ die Zeit der k -ten Abfahrt an Station S_i .
- Der Vektor $x(k+1)$ beschreibt die Zeiten der $(k+1)$ -ten Abfahrt der einzelnen Stationen und kann in Abhängigkeit von $x(k)$ dargestellt werden.
- Eine Regelmäßigkeit der Abfahrtszeiten kann durch gute Wahl der Startzeiten erzielt werden.
- Wir nennen den Zyklus mit dem höchsten durchschnittlichen Kantengewicht *kritischen Zyklus*. Dieser Zyklus beschränkt die mögliche Taktzeit des Verkehrsnetzes und gibt die bestmögliche Taktzeit der Abfahrten vor.
- Um die Taktzeit zu verringern, muss auf der zu dem *kritischen Zyklus* gehörigen Schleife ein weiteres Transportmittel eingesetzt werden. Weitere Transportmittel können durch das Hinzufügen virtueller Stationen simuliert werden.
- Die Auswirkungen von Verspätungen sind abhängig davon, auf welchem Zyklus sie erfolgen. Verspätungen von Transportmitteln, die zum kritischen Zyklus gehören, bleiben erhalten, während Verspätungen von Transportmitteln, die zu anderen Zyklen gehören, nach und nach verschwinden, falls sie sich nicht auf den kritischen Zyklus übertragen.



3.2 Matrizen in der Max-Plus-Algebra

Wir führen nun die Darstellung des Graphen als Matrix ein, die sämtliche Informationen über die vorhandenen Kanten und deren Gewichte enthält. Auch die Matrix liest sich ähnlich wie eine Tabelle. Der Wert der j -ten Spalte in der i -ten Zeile gibt das Gewicht der Kante an, die vom j -ten Knoten zum i -ten Knoten verläuft. Gibt es keine direkte Verbindung von j nach i , so tragen wir ε ein.

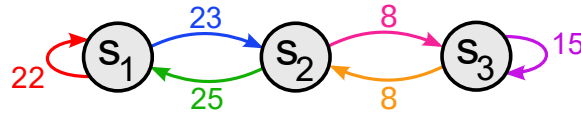


Abbildung 9: Graph des Streckennetzes Bad Neuenahr - Remagen - Linz

Für unseren Graphen, der die Ausgangsbedingungen unseres Verkehrsnetzes darstellt, ergibt sich also die Tabelle:

Tabelle 20: Tabelle aus Graph

	von		
nach	S_1	S_2	S_3
S_1	22	25	ε
S_2	23	ε	8
S_3	ε	8	15

Die Tabelle können wir jetzt in einer Matrix darstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A beschreibt also alle ein-kantigen Wege, die der Graph enthält. In diesem Kapitel betrachten wir, wie wir die Matrizen nutzen können, um weitere Informationen aus einem oder mehreren Graphen darzustellen. Die Matrix für das Verkehrsnetz mit einem zusätzlichen Bus an der Station S_2 ist dementsprechend:

$$B = \begin{pmatrix} 22 & \varepsilon & \varepsilon & 25 \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

In diesem Kapitel betrachten wir, wie wir die Matrizen nutzen können, um weitere Informationen aus einem oder mehreren Graphen darzustellen.

Übung 6. Stellt die Matrix C für das Verkehrsnetz mit zwei zusätzlichen Bussen, die an den Stationen S_2 und S_1 starten, auf.

Die Elemente der Matrix können wir durch a_{ij} anhand ihrer Position beschreiben. Für A ist zum Beispiel der Eintrag in der zweiten Zeile und ersten Spalte $a_{21} = 23$ und der Eintrag in der ersten Zeile und zweiten Spalte

$a_{12} = 25$. Die Umwandlung des Graphen in eine Matrix hat den Vorteil, dass wir mit Matrizen rechnen können. Dazu müssen wir unsere neuen Operatoren \oplus und \odot auch für Matrizen definieren. Wie wir zwei Matrizen miteinander verrechnen, lässt sich anhand unserer ursprünglichen Idee herleiten. Die Dauer aufeinanderfolgender Prozesse soll mit \odot summiert werden und durch \oplus das Maximum mehrerer parallel verlaufender Prozesse bei deren Zusammenführung bestimmt werden.

Bei der Verknüpfung von zwei Matrizen mit \oplus wird für jede Position der Wert in den beiden Matrizen verglichen und das Maximum ausgewählt, sodass eine neue Matrix entsteht. Anschaulicher ist die graphische Interpretation: Um die Operation \oplus durchführen zu können, müssen die Graphen der Matrizen dieselben Knoten haben. Die Kanten und Kantengewichte dürfen unterschiedlich sein. Die Verrechnung zweier Matrizen mit \oplus kann also nur erfolgen, wenn sie die gleiche Anzahl an Spalten und Zeilen haben. Die Phasendauern und Verbindungen der Phasen der Graphen können dabei unterschiedlich sein. Wenn die Matrizen mit \oplus verrechnet werden, beschreibt die Matrix, die wir erhalten, einen dritten Graphen, dessen Kanten die jeweils längsten Phasendauern zwischen zwei Knoten beschreiben.

Das klingt zunächst einmal kompliziert, deshalb veranschaulichen wir die Matrizenrechnung mit \oplus anhand von zwei (3×3) -Matrizen M und N . Zunächst stellen wir eine allgemeine Form der Matrizen und die entsprechenden Graphen auf. Anschließend betrachten wir ein Beispiel mit konkreten Werten und dem Graphen, der sich aus der berechneten Matrix ergibt.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$$

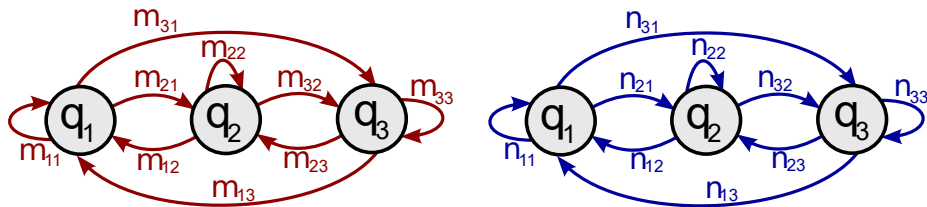


Abbildung 10: Graphen der Matrizen M und N

Zur Berechnung von $M \oplus N$ wählen wir für das entsprechende Element in der j -ten Spalte und i -ten Zeile das Maximum $\max\{m_{ij}, n_{ij}\}$ aus.

$$M \oplus N = \begin{pmatrix} \max\{m_{11}, n_{11}\} & \max\{m_{12}, n_{12}\} & \max\{m_{13}, n_{13}\} \\ \max\{m_{21}, n_{21}\} & \max\{m_{22}, n_{22}\} & \max\{m_{23}, n_{23}\} \\ \max\{m_{31}, n_{31}\} & \max\{m_{32}, n_{32}\} & \max\{m_{33}, n_{33}\} \end{pmatrix}$$

Für ein konkretes Beispiel ergibt sich mit

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \\ 2 & 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad M \oplus N = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \\ 2 & 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

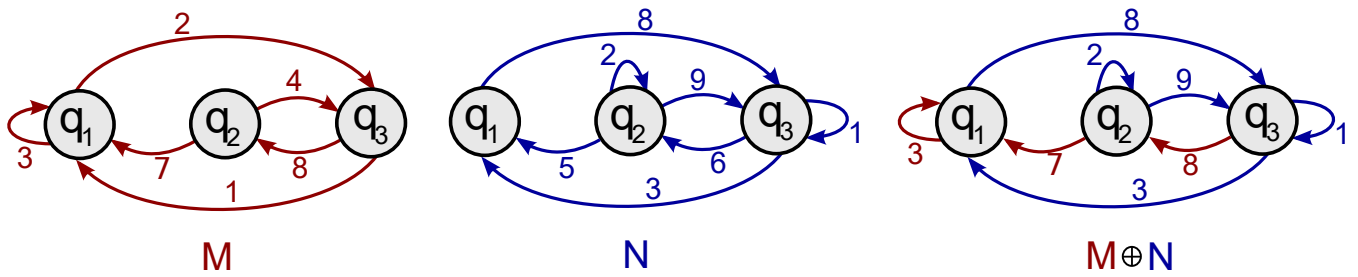


Abbildung 11: Graphische Darstellung des Operators \oplus bei Matrizen

Die Kommutativität von \oplus für Matrizen ist klar, da $\max\{m_{ij}, n_{ij}\} = \max\{n_{ij}, m_{ij}\}$ ist. Die Gültigkeit der Assoziativität wird ebenso anhand der Definition von \oplus schnell klar. Auch bei der Rechnung mit Matrizen gibt es ein neutrales Element von \oplus , welches wir als $O_{n \times m}$ bezeichnen. Dieses ist eine Matrix, die lediglich ε als Einträge enthält:

$$O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Interessant ist nun die Bedeutung und graphische Interpretation von \odot für Matrizen. Eine Matrix beschreibt das Gewicht von einzelnen Kanten zwischen zwei Knoten. Mit der Operation \odot können wir das Gewicht von aufeinander folgenden Kanten einer Matrix M berechnen. $M \odot M = M^{\odot 2}$ entspricht einer Matrix, die an der ij -ten Stelle das größte aufsummierte Kantengewicht von zwei Kanten enthält, die den j -ten Knoten mit dem i -ten Knoten des Graphen der ursprünglichen Matrix M verbinden. $M \odot M \odot M$ entspricht einer Matrix, die an der ij -ten Stelle das größte aufsummierte Kantengewicht von drei Kanten enthält, die den j -ten Knoten mit dem i -ten Knoten des Graphen der ursprünglichen Matrix M verbinden und so weiter. Um das Gewicht zweier Kanten summieren zu können, muss die erste Kante in den Knoten eingehen, von dem die zweite Kante ausgeht. In der Matrix entspricht dies Einträgen bei m_{ij} und bei m_{ki} , die addiert werden. Die genaue Berechnung möchten wir nun anhand unseres Beispiels herleiten. Dazu betrachten wir wieder die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Matrix N entspricht der Eintrag n_{32} dem Gewicht der Kante von Knoten q_2 zu Knoten q_3 . Das Element an der selben Stelle in der Matrix $N^{\odot 2} = N \odot N$ bezeichnen wir mit $n_{32}^{\odot 2}$. Dieses Element beschreibt nun das größte aufsummierte Kantengewicht von zwei Kanten, die im Graphen von N den Knoten q_2 mit q_3 verbinden. Der Graph von N ist in der unteren Abbildung auf der linken Seite dargestellt, wobei die drei möglichen Pfade mit zwei Kanten von q_2 nach q_3 farblich markiert sind. Für den Graphen von $N^{\odot 2}$ entspricht das Kantengewicht der einzelnen Kante von q_2 nach q_3 dem zwei-kantigen Pfad aus N mit maximalem Gewicht, also $\max\{5 + 8, 2 + 9, 9 + 1\} = 13$. Analog wurden für den Graphen von $N^{\odot 2}$ die weiteren Kanten und ihre Gewichte bestimmt. Der vollständige Graph von $N^{\odot 2}$ ist in der unteren Abbildung rechts abgebildet.



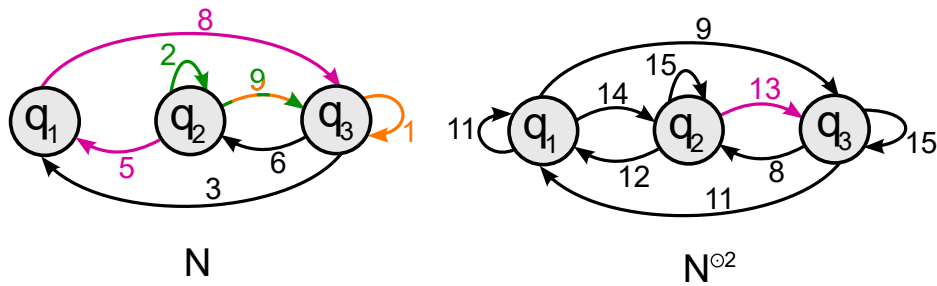


Abbildung 12: Graphische Darstellung der *Potenzierung* einer Matrix

Um n_{32} von $N^{\odot 2}$ zu bestimmen, wurde also die dritte Zeile mit der zweiten Spalte verrechnet, indem das Maximum von den Summen der ersten Einträge, der zweiten Einträge und der dritten Einträge gebildet wurde. Dies können wir verallgemeinern, um Matrizen direkt miteinander zu verrechnen und nicht einen Umweg über die graphische Interpretation zu machen. Der ij -te Wert von $N^{\odot 2}$ wird anhand der j -ten Spalten und der i -ten Zeile durch $\max\{n_{1j} + n_{i1}, n_{2j} + n_{i2}, n_{3j} + n_{i3}\}$ bestimmt. Wir betrachten also die j -te Spalte der hinteren Matrix und die i -te Zeile der vorderen Matrix. Die Wege, die wir dabei betrachten, sind zwei-kantig und verlaufen von Knoten j zu Knoten i . Um das Kantengewicht zu bestimmen, addieren wir den ersten Eintrag in der j -ten Spalte mit dem ersten Eintrag der i -ten Zeile. Genauso addieren wir den zweiten Eintrag der j -ten Spalte und den zweiten Eintrag der i -ten Zeile. Dies setzen wir fort, bis wir das Ende der Spalte und Zeile erreicht haben. Abschließend wählen wir die größte der soeben berechneten Summen als Eintrag der neuen Matrix aus. Dies ist zunächst unintuitiv, da wir als Fahrgast schnellstmöglich von einem Ort zum anderen gelangen möchten. Unser Ziel ist es aber, einen Takt zu finden, den alle Transportmittel einhalten können. Dafür müssen wir die Wege mit der längsten Fahrzeit berücksichtigen.

Natürlich kann man auch zwei unterschiedliche Matrizen durch \odot miteinander verrechnen, wenn die Anzahl an Spalten der ersten Matrix der Anzahl an Zeilen der zweiten Matrix entspricht. Dies ist aber für unser Anliegen eher von geringem Interesse. Wir möchten aufeinanderfolgende Kanten desselben Graphen aufsummieren, also die Gewichte von mehr-kantigen Pfaden bestimmen. Die *Multiplikation* verschiedener Matrizen kann jedoch genutzt werden, wenn sich der Fahrplan ändert und wir die Fahrzeiten zwischen zwei Stationen bestimmen möchten, wobei ein Fahrplanwechsel nach unserem Zwischenhalt erfolgt. Dies kann zum Beispiel der Fall sein, wenn wegen Störungen andere Strecken gefahren werden müssen oder wenn der Fahrplan in der Nacht von den tagsüber durchgeführten Fahrten abweicht.

Formulieren wir die Rechenvorschrift allgemeiner für zwei beliebig große Matrizen A mit i Zeilen und j Spalten und B mit j Zeilen und k Spalten können wir für die Einträge c_{xy} der Matrix $C = A \odot B$, wobei $x \leq i$ und $y \leq k$, eine Formel aufstellen bei der r die Zahlen von 1 bis j durchläuft:

$$c_{xy} = \max\{b_{1y} + a_{x1}, b_{2y} + a_{x2}, \dots, b_{jy} + a_{xj}\} = \max_{r=1,2,\dots,j} \{b_{ry} + a_{xr}\} = \bigoplus_{r=1,2,\dots,j} b_{ry} \odot a_{xr}.$$

Diese Gleichung erscheint zunächst vielleicht etwas abschreckend, deshalb schauen wir uns direkt ein Beispiel an. Mit Hilfe der allgemeinen Vorschrift bestimmen wir nun $N^{\odot 2}$. Dabei ist farblich hervorgehoben, wie die erste Zeile mit der zweiten Spalte verrechnet wurde.

$$N \odot N = \begin{pmatrix} \epsilon & 5 & 3 \\ \epsilon & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \epsilon & 5 & 3 \\ \epsilon & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \max\{n_{11} + n_{11}, n_{21} + n_{12}, n_{31} + n_{13}\} & \max\{n_{12} + n_{11}, n_{22} + n_{12}, n_{32} + n_{13}\} & \max\{n_{13} + n_{11}, n_{23} + n_{12}, n_{33} + n_{13}\} \\ \max\{n_{11} + n_{21}, n_{21} + n_{22}, n_{31} + n_{23}\} & \max\{n_{12} + n_{21}, n_{22} + n_{22}, n_{32} + n_{23}\} & \max\{n_{13} + n_{21}, n_{23} + n_{22}, n_{33} + n_{23}\} \\ \max\{n_{11} + n_{31}, n_{21} + n_{32}, n_{31} + n_{33}\} & \max\{n_{12} + n_{31}, n_{22} + n_{32}, n_{32} + n_{33}\} & \max\{n_{13} + n_{31}, n_{23} + n_{32}, n_{33} + n_{33}\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \max\{\varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + 5, 8 + 3\} & \max\{5 + \varepsilon, 2 + 5, 9 + 3\} & \max\{3 + \varepsilon, 6 + 5, 1 + 3\} \\ \max\{\varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + 2, 8 + 6\} & \max\{5 + \varepsilon, 2 + 2, 9 + 6\} & \max\{3 + \varepsilon, 6 + 2, 1 + 6\} \\ \max\{\varepsilon + 8, \varepsilon + 9, 8 + 1\} & \max\{5 + 8, 2 + 9, 9 + 1\} & \max\{3 + 8, 6 + 9, 1 + 1\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 14 & 15 & 8 \\ 9 & 13 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Operation \odot ist für Matrizen nicht kommutativ. Hierzu folgt ein Gegenbeispiel.

Sei $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

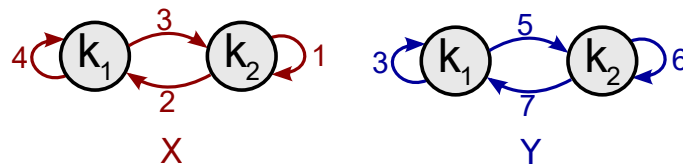


Abbildung 13: Graphische Darstellung der Matrizen X und Y

Dann gilt:

$$X \odot Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\{3 + 4, 5 + 2\} & \max\{7 + 4, 6 + 2\} \\ \max\{3 + 3, 5 + 1\} & \max\{7 + 3, 7 + 1\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 6 & 10 \end{pmatrix},$$

aber $Y \odot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\{4 + 3, 3 + 7\} & \max\{2 + 3, 1 + 7\} \\ \max\{4 + 5, 3 + 7\} & \max\{2 + 5, 1 + 6\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$

Auch eine Überlegung, welche Auswirkung das Vertauschen der Matrizen in der graphischen Interpretation hat, führt schnell zu dem Schluss, dass die Kommutativität nicht gegeben ist, denn es ist nicht egal, ob wir das Gewicht der Kante zwischen dem ersten und zweiten Knoten des einen Graphen mit dem Gewicht der Kante zwischen dem zweiten und ersten Knoten aus dem anderen Graphen summieren oder andersherum. Die beiden folgenden Graphen gehören zu den Matrizen, die sich aus $X \odot Y$ beziehungsweise $Y \odot X$ ergeben. Dabei gibt die Farbe der Kantengewichte an, aus welcher Matrix die Werte stammen.

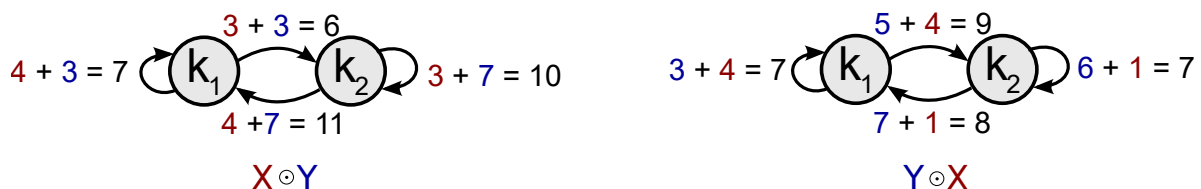


Abbildung 14: Graphische Darstellung des Unterschieds zwischen $X \odot Y$ und $Y \odot X$

Wir können durch das *Potenzieren* unserer Matrix A, die das Verkehrsnetz rund um Remagen darstellt, berech-

nen, wie lange die Fahrt von Linz nach Bad Neuenahr oder auch von Bad Neuenahr nach Linz dauert:

$$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 47 & 33 \\ 45 & 48 & 23 \\ 31 & 23 & 30 \end{pmatrix}.$$

Nun enthält die Matrix $A^{\odot 2}$ Informationen darüber, wie lange die Fahrt zwischen zwei Stationen dauert, die über einen Umstieg erfolgt. Der Eintrag $a_{31}^{\odot 2} = 31$ gibt zum Beispiel an, dass der längste Weg von Bad Neuenahr nach Linz über eine Zwischenstation 31 Minuten dauert. In diesem Fall ist es es auch der einzige Weg. Es gibt aber auch Knoten, zwischen denen es mehrere zwei-kantige Wege gibt. Ist dies der Fall, enthält $A^{\odot 2}$ den Weg mit dem größten Kantengewicht. Der Eintrag $a_{11}^{\odot 2} = 48$ gibt an, dass der längste Weg von Bad Neuenahr über eine Zwischenstation zu sich selbst 48 Minuten dauert. Es gibt zwei mögliche Wege: Von S_1 nach S_2 und wieder zurück oder zwei Mal von S_1 zu sich selbst. Erstgenannter Weg ist mit 48 Minuten länger, als der 44-minütige zweite Weg. Der Eintrag in $A^{\odot 2}$ ist die Zeit des längsten Weges, also 48.

Auch für \odot gilt das Assoziativgesetz für Matrizen, da durch die Reihenfolge der Matrizen festgelegt ist, welche Kanten von welchen Graphen miteinander aufsummiert werden. Für drei Matrizen F , G und H mit passender Anzahl an Spalten und Zeilen gilt also $(F \odot G) \odot H = F \odot (G \odot H)$. Zudem gilt beim Rechnen mit Matrizen das Distributivgesetz, also $F \odot (G \oplus H) = F \odot G \oplus F \odot H$. Bedingung dafür ist, dass die Matrizen überhaupt miteinander verrechnet werden können, das heißt die Anzahl der Spalten von F muss der der Zeilen von G und H entsprechen und G und H besitzen zusätzlich die gleiche Anzahl an Spalten.

Auch \odot besitzt für Matrizen ein neutrales Element, welches wir E nennen. Die Einträge von E sind auf der von oben links nach unten rechts verlaufenden Hauptdiagonalen „0“ und an allen weiteren Stellen ε . Ihr könnt euch selbst davon überzeugen, dass für eine beliebige Matrix B und der Einheitsmatrix E bei der Rechnung mit \odot jeweils der Eintrag von A übernommen wird, also $A \odot E = E \odot A = A$ gilt. Zum Beispiel ist die neutrale (2×2) -Matrix:

$$E_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Bevor wir zu unserem Beispiel zurückkehren, möchten wir euch mit den folgenden Übungsaufgaben die Möglichkeit bieten, selbst mit kleinen Matrizen zu rechnen. Bei Vektoren handelt es sich auch um Matrizen, die nur eine Spalte besitzen. Wir können das *Produkt* einer Matrix und eines Vektors also anhand der allgemeinen Formel berechnen.

Übung 7.

Berechnet folgende Matrizen.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad \text{Sei } M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Berechnet } M^{\odot 2} := M \odot M$$

Merkkasten zu Kapitel 3.2.

Zusammenfassung der wichtigsten Informationen aus dem Kapitel.

- Eine Matrix zu einem Graphen enthält Informationen zum Verlauf der Kanten und deren Kantengewicht
- Eine Matrix lässt sich wie eine Tabelle lesen: Eintrag a_{ij} in der j -ten Spalte und der i -ten Zeile beschreibt das Kantengewicht der Kante von Knoten j zu Knoten i .
- \oplus bei Matrizen entspricht der Wahl des maximalen Eintrags an jeder Position a_{ij} .
- \oplus ist für Matrizen sowohl assoziativ als auch kommutativ.
- \odot bei zwei Matrizen entspricht der Berechnung des maximalen Kantengewichts zwei-kantiger Wege von Knoten j nach Knoten i , wobei die erste Kante von der rechten Matrix als erster *Faktor* und die zweite Kante von der linken Matrix als zweiter *Faktor* definiert ist.
- Die n -te *Potenz* einer Matrix entspricht dem maximalen Kantengewicht von n -kantigen Wegen von Knoten j zum Knoten i im Graphen der Matrix.
- \odot ist für Matrizen assoziativ, aber **nicht** kommutativ.
- Für \oplus und \odot gilt bei Matrizenrechnung das Distributivgesetz.



3.3 Eigenwert und Eigenvektor

Mit Hilfe unserer Matrixdarstellung können wir nun die $(k + 1)$ -ten Abfahrten als *Produkt* einer Matrix und den vorherigen Abfahrten darstellen. Unser ursprüngliches Verkehrsnetz lässt sich nun beschreiben als:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(k) \odot 22 \oplus x_2(k) \odot 25 \\ x_1(k) \odot 23 \oplus x_3(k) \odot 8 \\ x_2(k) \odot 8 \oplus x_3(k) \odot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der Matrix A beschreiben also die Zeiten, die zwischen der k -ten und der $(k + 1)$ -ten Abfahrt der Stationen vergehen. Dabei stellt das Element a_{ij} die Zeit dar, die zwischen der k -ten Abfahrt der Station j und der $(k + 1)$ -ten Abfahrt der Station i mindestens vergehen muss. Wir wollen nun erreichen, dass die Abfahrtszeiten regelmäßig im gleichen Takt erfolgen. Wir suchen also einen konstanten Wert λ , sodass die Differenz zwischen zwei Abfahrten immer genau diesen Wert annimmt. Es soll also gelten:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \odot x_1(k) \\ \lambda \odot x_2(k) \\ \lambda \odot x_3(k) \end{pmatrix} := \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}.$$

Wir haben an dieser Stelle direkt definiert, wie man eine reelle Zahl λ mit einem Vektor bezüglich \odot verrechnen kann: Wir *multiplizieren* λ auf jeden Eintrag des Vektors. Dies nennt man auch *skalare Multiplikation*. Setzen wir die beiden letzten Gleichungen nun gleich, erhalten wir den Vektor $x(k)$ auf beiden Seiten:

$$\begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}.$$

Um einen regelmäßigen Fahrplan zu erhalten, benötigen wir also einen Vektor v und einen reellen Wert λ , sodass für die Matrix A gilt, dass $A \odot v = \lambda \odot v$. Ist diese Gleichung erfüllt, nennen wir λ den Eigenwert und v einen Eigenvektor der Matrix A . Ein solcher Vektor würde Abfahrtszeiten angeben, für die sämtliche folgende Abfahrtszeiten nach einer regelmäßigen Taktzeit λ erfolgen. Um eine sinnvolle Lösung zu erhalten, schließen wir den Vektor aus, der nur ε -Einträge besitzt. Auch wenn dieser die gewünschte Gleichung erfüllt, ist er in unserem Anwendungskontext nicht hilfreich. Wir haben bereits zu Beginn des Kapitels festgestellt, dass eine regelmäßige Taktzeit größer-gleich dem durchschnittlichen Kantengewicht aller Zyklen sein muss, damit sie von allen Transportmitteln eingehalten werden kann. Die optimale regelmäßige Taktzeit würde somit dem größten durchschnittlichen Kantengewicht aller Zyklen entsprechen. Wir überlegen uns nun, wie wir das maximale Durchschnittsgewicht aller Zyklen in einem Graphen bestimmen können. Die Gewichte der ein-kantigen Zyklen können wir in der Hauptdiagonalen der Matrix, also der Diagonalen von oben links nach unten rechts, ablesen. Diese Werte beschreiben Gewichte von Kanten, die von einem Knoten ausgehen und in denselben Knoten wieder eingehen. Um auch mehr-kantige Zyklen zu berücksichtigen, betrachten wir auch die Hauptdiagonale der *Potenzen* der Matrix. Hier sind für $A^{\odot 2}$ das Gewicht der größten zwei-kantigen Zyklen und für $A^{\odot 3}$ das Gewicht der größten drei-kantigen Zyklen zu entnehmen. Da das Durchschnittsgewicht von Interesse ist, teilen wir die Werte der zwei-kantigen Zyklen durch zwei und die der drei-kantigen Zyklen durch drei. An dieser Stelle zeigt sich auch, warum wir die Matrizenmultiplikation so definiert haben, dass beim Berechnen der n -ten Potenz das größte aufsummierte Kantengewicht aller Wege zwischen zwei Knoten über n Kanten betrachtet wird.

Wir geben zunächst die drei *Potenzen* der Matrix A , also $A^{\odot k}$ für $k = 1, 2, 3$, an und erstellen anschließend eine übersichtliche Tabelle, in der wir die Durchschnittsgewichte der Zyklen vergleichen.

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 48 & 47 & 33 \\ 45 & 48 & 23 \\ 31 & 23 & 30 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 70 & 73 & 55 \\ 71 & 70 & 56 \\ 53 & 56 & 45 \end{pmatrix}$$

Es reicht, die ersten drei *Potenzen* von A zu berücksichtigen, weil kein neuer relevanter Zyklus mit vier Kanten oder mehr erschlossen werden kann. Ein solcher Zyklus würde kleinere Zyklen enthalten, die wir bereits berücksichtigen. Der aus mehreren kleineren Zyklen zusammengesetzte Zyklus kann für uns kein Gewinn sein, da sein Durchschnittsgewicht pro Kante kleiner oder gleich dem des in dieser Hinsicht besten Teilzyklus ist. Betrachten wir beispielsweise den vier-kantigen Zyklus von S_1 über S_2 zu S_3 und über S_2 zurück zu S_1 , so hat dieser ein Durchschnittsgewicht von $\frac{23+8+8+25}{4} = \frac{64}{4} = 16$.

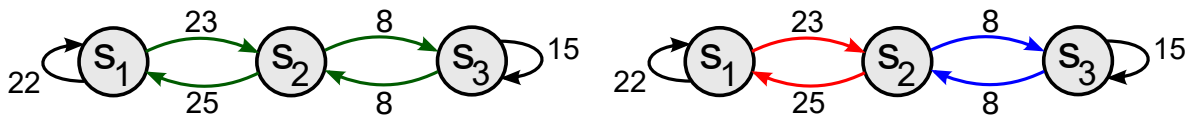


Abbildung 15: Vier-kantiger Zyklus (links) und zwei zwei-kantige Zyklen (rechts)

Dieser Zyklus setzt sich aber aus den beiden kleineren Zyklen S_1 und S_2 sowie S_2 und S_3 zusammen. Der zwei-kantige Zyklus S_1 zu S_2 hat mit $\frac{23+25}{2} = \frac{48}{2} = 24$ jedoch ein deutlich größeres Durchschnittsgewicht. Der andere zwei-kantige Zyklus mit Knoten S_2 und S_3 und einem Durchschnittsgewicht von $\frac{16}{2} = 8$ zieht das Durchschnittsgewicht des zusammengesetzten Zyklus herunter.

Als Zyklus mit maximalem durchschnittlichen Kantengewicht kommen also nur Zyklen mit höchstens drei Kanten in Frage. In der Tabelle betrachten wir das Durchschnittsgewicht aller dieser Zyklen. Anhand der Zeilen werden alle ein- bis drei-kantigen Zyklen erschlossen und anhand der Spalten jeder Ausgangspunkt der Zyklen berücksichtigt. Achtung: Es handelt sich bei den hier abgebildeten Bruchstrichen um die gewöhnliche Division!

Tabelle 21: Durchschnittliches Kantengewicht der Zyklen

Eintrag \ Potenz	11	22	33
k = 1	22	ε	15
k = 2	$\frac{48}{2} = 24$	$\frac{48}{2} = 24$	$\frac{30}{2} = 15$
k = 3	$\frac{70}{3}$	$\frac{70}{3}$	$\frac{45}{3} = 15$

Der Tabelle 21 können wir entnehmen, dass der größte Wert der durchschnittlichen Zyklusgewichte 24 ist, was auch unserer Überlegung zum kritischen Zyklus des Graphen entspricht. Der Wert 24 tritt sowohl bei Knoten 1, als auch Knoten 2 für die zweite *Potenz* auf, da diese Knoten am zwei-kantigen kritischen Zyklus beteiligt sind.

Da wir beim Erstellen der Tabelle alle relevanten Fälle abdecken, können wir dieses Verfahren verallgemeinern und nutzen, um das größte durchschnittliche Zyklusgewicht zu bestimmen. Das halten wir im folgenden Satz fest.

Satz 1.

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix. Dann entspricht der größte Eintrag der Tabelle, die für jede *Potenz* $k \leq n$ alle Diagonaleinträge dividiert durch k enthält, dem maximalen Durchschnittsgewicht der Zyklen des Graphen.

Die Normierung der Matrix A um das maximale durchschnittliche Kantengewicht aller Zyklen ermöglicht es uns, weitere Eigenschaften der Wege abzulesen. Das maximale durchschnittliche Kantengewicht der Zyklen entspricht dem Eigenwert, wie wir später feststellen werden. Daher verwenden wir im Folgenden auch für diesen Wert die eigentlich für den Eigenwert verwendete Variable λ . Die normierte Matrix nennen wir A_λ und bestimmen sie durch die Verschiebung aller Werte um λ . Sie ist also definiert als $A_\lambda := -\lambda \odot A$, das heißt wir ziehen von jedem Eintrag von A das maximale durchschnittliche Kantengewicht aller Zyklen ab. Das Prinzip ist also analog zu der skalaren Multiplikation bei einem Vektor.

$$A_\lambda = -\lambda \odot A = -24 \odot \begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -24 \odot 22 & -24 \odot 25 & -24 \odot \varepsilon \\ -24 \odot 23 & -24 \odot \varepsilon & -24 \odot 8 \\ -24 \odot \varepsilon & -24 \odot 8 & -24 \odot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon & -16 \\ \varepsilon & -16 & -9 \end{pmatrix}.$$

Der Graph der normierten Matrix ist in folgender Abbildung dargestellt. Kanten, die ein Gewicht kleiner als das maximale Kantendurchschnittsgewicht besitzen, sind nun negativ und Kanten, deren Kantengewicht größer als dieses ist, sind positiv.

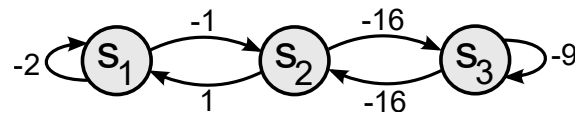


Abbildung 16: Graph der normierten Matrix A_λ

A_λ zeigt die jeweiligen Abweichungen von den Durchschnittstaktzeiten an. Auch für A_λ können wir nun über die *Potenzen* das maximale Gewicht von Wegen mit verschiedenen Kantenlängen bestimmen.

$$A_\lambda^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -15 \\ -3 & 0 & -25 \\ -17 & -25 & -18 \end{pmatrix} \quad A_\lambda^{\odot 3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -17 \\ -1 & -2 & -16 \\ -19 & -16 & -27 \end{pmatrix}$$

In $A_\lambda^{\odot 2}$ finden wir an der Stelle ij die größte Abweichung vom doppelten Durchschnittsgewicht, wenn wir von Knoten j über einen weiteren Knoten zu Knoten i gehen. Hierbei können sich die Abweichungen einzelner Kanten ausgleichen. Die maximalen Kantengewichte aller Wege mit einer bis n Kanten von Knoten j zu Knoten i fassen wir in der Matrix A_λ^+ zusammen. Dafür wählen wir für jeden Eintrag $a_{\lambda_{ij}}^+$ den größten entsprechenden Eintrag aus den *Potenzen* von A_λ .

$$A_\lambda^+ = A_\lambda \oplus A_\lambda^{\odot 2} \oplus A_\lambda^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -15 \\ -1 & 0 & -16 \\ -17 & -16 & -9 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix besitzt aufgrund der Normierung für die Spalten der im kritischen Zyklus enthaltenen Knoten im Diagonalargument zwei Nullen. Wie wir schon gesehen haben, besteht dieser in unserem Fall aus den Knoten

1 und 2. Dies passt dazu, dass die ersten beiden Diagonaleinträge von A_λ^+ den Wert 0 annehmen. Wir können somit auch hier den kritischen Zyklus erkennen. Die Matrix A_λ^+ hat zudem eine weitere praktische Eigenschaft, denn aus ihr können wir die Eigenvektoren von A direkt ablesen. Die Eigenvektoren sind die Spaltenvektoren der zum kritischen Zyklus gehörenden Knoten. In unserem Fall erhalten wir somit die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -17 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Dass es sich dabei um Eigenvektoren handelt, können wir schnell durch Nachrechnen überprüfen. Denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & 8 & 15 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 23 \\ 7 \end{pmatrix} = 24 \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Dies ist genau die Gleichung, die erfüllt sein muss, damit v_1 als Eigenvektor von A zu $\lambda = 24$ bezeichnet werden kann. Analog kann man auch v_2 überprüfen. Da die Gleichung erfüllt ist, wissen wir, dass in unserem Beispiel das maximale durchschnittliche Zyklusgewicht von A , also 24, dem Eigenwert von A entspricht.

Die Eigenvektoren helfen uns nun geeignete Startzeiten zu finden. Wir erkennen aus diesen bereits, wie die einzelnen Abfahrten verschoben sein müssen, damit ein regelmäßiger Takt entsteht. In unserem Fall erkennen wir beispielsweise aus v_2 , dass die Abfahrt an Station 3 immer 16 Minuten vor der Abfahrt an Station 2 und 17 Minuten vor der Abfahrt an Station 1 erfolgen muss. Wir können die Startzeiten jetzt so verschieben, dass der Eintrag in der letzten Zeile 0 ist, sodass die Abfahrten zu Beginn nur an Station 3 erfolgen. Dazu nutzen wir wieder die skalare Multiplikation und erhalten:

$$v = 17 \odot v_1 = \begin{pmatrix} 17 \odot 0 \\ 17 \odot -1 \\ 17 \odot -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn ihr euch noch einmal Tabelle 12 anschaut, seht ihr, dass v genau unseren gewählten Startzeiten entspricht, mit welchen wir anschließend regelmäßige Abfahrtszeiten erhalten haben.

So, wie wir gerade 17 auf v_1 *multipliziert* haben, können wir auch eine Zahl t finden, sodass $v_1 = t \odot v_2$. In diesem Fall gilt $v_1 = -1 \odot v_2$. Wenn es eine solche Zahl gibt, nennen wir v_1 und v_2 auch *linear* voneinander *abhängig*. Die Abhängigkeit folgt konsequenterweise daraus, dass die Knoten 1 und 2 beide Teil des kritischen Zyklus sind. Erfolgen die Abfahrtszeiten an der einen Station regelmäßig, so müssen sie auch an den anderen Stationen des Zyklus regelmäßig erfolgen, um die Taktzeit einzuhalten. Diese Abhängigkeit kann besonders nützlich sein, wenn es anders als in unserem Beispiel mehrere kritische Zyklen gibt und die einzelnen Knoten dem jeweiligen Zyklus zugeordnet werden sollen. Auch wenn wir für t eine andere reelle Zahl gewählt und auf den Eigenvektor v_2 aufaddiert hätten, wäre der neu entstandene Vektor ebenso ein von v_2 linear abhängiger Eigenvektor, da der Abstand zwischen den einzelnen Einträgen im Vektor erhalten bleibt. Zu einem Eigenwert können wir also beliebig viele linear abhängige Eigenvektoren finden.

Wir haben nun an einem Beispiel gesehen, dass das maximale Kantendurchschnittsgewicht aller Zyklen einem Eigenwert entspricht und wie man zu diesem Eigenwert einen Eigenvektor erhält. Dass wir die Eigenvektoren direkt aus der Matrix A_λ^+ ablesen konnten, war dabei kein Zufall, sondern ist allgemein auf diese Weise möglich. Damit wir auch bei anderen Matrizen analog vorgehen dürfen, wollen wir zeigen, dass A_λ^+ stets die Eigenvektoren

ren einer Matrix A liefert und das maximale Kantendurchschnittsgewicht aller Zyklen einem Eigenwert von A entspricht. Diese Eigenschaft und die eben erkannte *lineare Abhängigkeit* von Knoten desselben Zyklus wollen wir im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit zugehörigem Graphen G und λ das größte durchschnittliche Kantengewicht aller Zyklen von A . Zudem sei $A_\lambda = -\lambda \odot A$ die um λ verschobene Matrix und $A_\lambda^+ = A_\lambda \oplus A_\lambda^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A_\lambda^{\odot n}$ die Matrix, die das maximale Kantengewicht aller Wege mit maximal n Kanten angibt. Dann gilt:

1. Wenn der k -te Diagonaleintrag der Matrix A_λ^+ den Wert 0 annimmt, so ist der entsprechende Spaltenvektor v_k ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .
2. Wenn v_i und v_j zwei Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind und die Knoten i und j auf demselben kritischen Zyklus liegen, gibt es eine Konstante μ , sodass $\mu \odot v_i = v_j$.

Wir haben diesen Satz im Anhang des Vorbereitungsmaterials gezeigt, da der Beweis nicht für den Wettbewerb relevant sein wird, sondern nur eurem Verständnis des Verfahrens dienen soll. Die Aussage des Satzes selbst ist dagegen wichtig, da sie uns nochmals zusammenfasst, wie wir Eigenwert und Eigenvektoren bestimmen können.

Abschließend möchten wir euch dazu ermutigen, selbst zu versuchen, das Verfahren anzuwenden. Zunächst ist das *Potenzieren* unserer Matrizen mühsam, mit ein bisschen Übung und im besten Fall einer guten Zusammenarbeit als Team, sind die benötigten Matrizen aber schnell aufgestellt.

Übung 8.

Bestimmt den Eigenwert und einen Eigenvektor der beiden Matrizen, die sich durch das Hinzufügen von zusätzlichen Bussen ergeben haben. Ihr könnt euer Ergebnis leicht kontrollieren, indem ihr überprüft, ob die Gleichung $A \odot v = \lambda \odot v$ erfüllt ist.

$$B = \begin{pmatrix} 22 & \varepsilon & \varepsilon & 25 \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 22 \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 15 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Merkkasten zu Kapitel 3.3.

Zusammenfassung der wichtigsten Informationen aus dem Kapitel.

- Man kann die $(k + 1)$ -ten Abfahrtszeiten bestimmen mit $x(k + 1) = A \odot x(k)$, wobei die Matrix A die Zeiten angibt, die zwischen der k -ten und $(k + 1)$ -ten Abfahrt vergehen.
- Wenn es eine Zahl λ und einen zugehörigen Vektor v gibt, sodass die Gleichung $A \odot v = \lambda \odot v$ erfüllt ist, so nennen wir λ den Eigenwert und v einen Eigenvektor von A .
- Wenn wir bei der Erstellung eines Fahrplans den Eigenwert einer Matrix, die das Verkehrsnetz beschreibt, als Taktzeit und die Werte des Eigenvektors als Startzeiten wählen, besitzt dieser regelmäßige Abfahrten bei optimaler Taktzeit.
- Bestimmung des Eigenwerts einer $(n \times n)$ -Matrix A :
 1. Aufstellen der ersten n Potenzen für die $(n \times n)$ -Matrix A .
 2. Bestimmung der durchschnittlichen Zyklengewichte, indem die Einträge der Hauptdiagonalen der Potenzen durch den Exponenten der jeweiligen Potenz dividiert werden.
 3. Das maximale durchschnittliche Zyklusgewicht entspricht dem gesuchten Eigenwert λ .
- Bestimmung der Eigenvektoren einer $(n \times n)$ -Matrix A :
 1. Aufstellen der normierten Matrix $A_\lambda = -\lambda \odot A$.
 2. Berechnung der ersten n Potenzen von A_λ .
 3. Aufstellen der Matrix $A_\lambda^+ = A_\lambda \oplus A_\lambda^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A_\lambda^{\odot n}$.
 4. Die Spalten von A_λ^+ , deren Einträge in der Hauptdiagonalen 0 sind, sind Eigenvektoren.
- Es gibt in der Max-Plus-Algebra unendlich viele *linear-abhängige* Eigenvektoren zu einem Eigenwert.

4 Wir erstellen einen Busfahrplan

Nachdem wir uns nun mit der Taktung eines Verkehrssystems beschäftigt haben, wollen wir uns einen Spezialfall anschauen, bei dem wir den genauen Fahrtverlauf zweier Busse, die synchronisiert werden, untersuchen wollen. Wir stellen also anders als im vorherigen Beispiel nicht die Abfahrtszeiten an den einzelnen Orten in den Vordergrund, sondern nehmen zwei konkrete Fahrtverläufe unter die Lupe und versuchen möglichst konkrete Informationen über diese zu gewinnen.

Um den Straßenverkehr zu entlasten, soll an Wochenenden für im Umkreis von Bonn liegende Städte durch zwei zusätzliche Buslinien eine attraktive Anbindung zu Freizeitaktivitäten in der Region geschaffen werden. Dafür soll die Linie 1 von Troisdorf starten und über Siegburg und Sankt Augustin zum Bonner Hauptbahnhof fahren. Danach fährt sie weiter über Alfter und Bornheim zum Phantasialand. Die Linie 2 beginnt in Euskirchen und fährt über Rheinbach und Meckenheim zum Hauptbahnhof. Von dort fährt sie über die Rheinaue und Königswinter nach Bad Honnef.

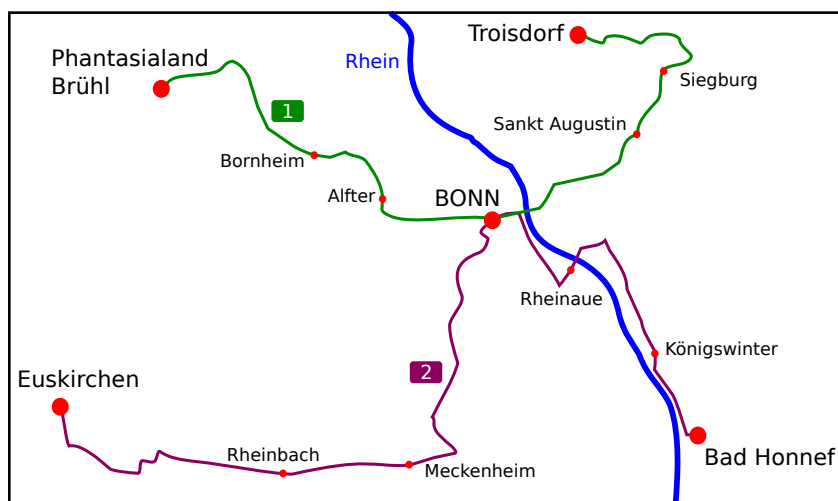


Abbildung 17: Straßenkarte für den Busfahrplan

Damit die Bewohner des Umkreises von Bonn die Möglichkeit haben, sowohl einen Ausflug zum östlich von Bad Honnef angrenzenden Siebengebirge zu machen als auch ins Phantasialand zu machen, sollen diese beiden Verbindungen synchronisiert werden und eine Umstiegszeit von fünf Minuten am Bahnhof, während der beide Busse warten, eingehalten werden. Die Fahrzeit zwischen Troisdorf und Bonn beträgt 55 Minuten, zwischen Euskirchen und Bonn 60 Minuten, zwischen Bonn und dem Phantasialand 40 Minuten und zwischen Bonn und Bad Honnef 45 Minuten. Unser Ziel ist es nun, einen optimalen Fahrplan aufzustellen, aus dem die Taktzeit, in der die beiden Schleifen gefahren werden können, hervorgehen. Außerdem soll der Plan auch Informationen über die Abfahrtszeiten der Start- und Endhaltestellen sowie die Zeitpunkte des Umstiegs am Bahnhof enthalten.



4.1 Synchronisationsgraphen erstellen und deuten

Zur Modellierung des Streckennetzes filtern wir zunächst die relevanten Phasen, die wir mit p_i bezeichnen, heraus. Mit τ_i bezeichnen wir zudem die zugehörigen Phasendauern.

Tabelle 22: Relevante Phasen des Streckennetzes und ihre Phasendauern

p_1	Der in Troisdorf gestartete Bus der Linie 1 ist auf dem Weg zum Bonner Bahnhof.	$\tau_1 = 55$
p_2	Der in Euskirchen gestartete Bus der Linie 2 ist auf dem Weg zum Bonner Bahnhof.	$\tau_2 = 60$
p_3	Die beiden Busse warten am Bahnhof (Umsteigezeit).	$\tau_3 = 5$
p_4	Linie 1 ist auf dem Weg vom Bahnhof zum Phantasialand.	$\tau_4 = 40$
p_5	Linie 2 ist auf dem Weg vom Bahnhof nach Bad Honnef.	$\tau_5 = 45$
p_6	Linie 1 ist auf dem Weg vom Phantasialand zum Bahnhof.	$\tau_6 = 40$
p_7	Linie 2 ist auf dem Weg von Bad Honnef zum Bahnhof.	$\tau_7 = 45$
p_8	Die beiden Busse warten am Bahnhof (Umsteigezeit).	$\tau_8 = 5$
p_9	Linie 1 ist auf dem Weg vom Bahnhof nach Troisdorf.	$\tau_9 = 55$
p_{10}	Linie 2 ist auf dem Weg vom Bahnhof nach Euskirchen.	$\tau_{10} = 60$

Die Phasen lassen sich mit den zugehörigen Zeiten und Ablaufvorschriften in einem Synchronisationsgraphen darstellen. Dazu tragen wir zunächst die einzelnen Phasen als Stellen in den Graphen ein. Achtung: Bei unseren vorherigen Graphen wurden die Stationen als Knoten und die Fahrzeiten als Kantengewichte dargestellt. Dies ist beim Synchronisationsgraphen nicht der Fall. Die kreisförmig dargestellten Stellen, die an Knoten erinnern, beschreiben die einzelnen Phasen mit den zugehörigen Phasendauern, und die Transitionen, die als Balken dargestellt werden, stehen für die Stationen, an denen gegebenenfalls eine Synchronisation vorgenommen wird. Zwischen zwei Kreisen befindet sich stets eine Transition. Die Transitionen stehen also für den Übergang zwischen zwei Phasen.

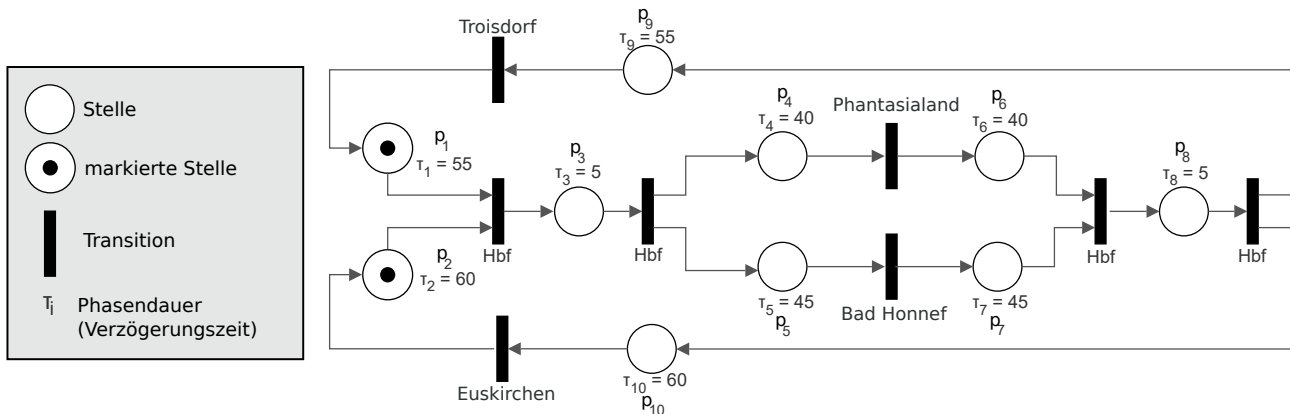


Abbildung 18: Synchronisationsgraph zu den Buslinien

Die Startpunkte werden durch einen Punkt in der Stelle dargestellt. Er markiert die aktuell aktive Phase und wandert bei fortschreitendem Ablauf. Die Phasendauer τ_i wird im Kontext von Synchronisationsgraphen auch als Verzögerungszeit bezeichnet. Denn sie ist die Zeit, die vergeht, bis der Punkt eine Stelle verlassen und in Pfeilrichtung in die Transition eingehen kann. Eine Stelle wird somit solange markiert, wie die Phasendauer lang ist. Eine Transition besitzt keine Verzögerungszeit, gibt die nachfolgenden Stellen aber erst frei, wenn alle der zu den eingehenden Pfeilen gehörigen Punkte bei der Transition ankommen. Die Transition von p_1 und p_2 nach p_3 kann beispielsweise erst erfolgen, wenn sich auf den beiden eingehenden Pfeilen Punkte befinden. Dies ist

erst dann der Fall, wenn die längere Verzögerungszeit, hier 60 Minuten, vergangen ist. Erst unmittelbar danach beginnt die Verzögerungszeit von p_3 , da erst in diesem Moment die Phase p_3 beginnt.

Ihr fragt euch an dieser Stelle vielleicht, warum wir in diesem Kontext nun statt des im vorherigen Abschnitt benutzten Graphen einen speziellen Synchronisationsgraphen verwenden. Wir verdeutlichen den Unterschied zwischen den beiden Anwendungen, indem wir auch zum Streckennetz aus Kapitel 3 einen Synchronisationsgraphen zeichnen. Dazu notieren wir uns auch hier zunächst die relevanten Phasen:

Tabelle 23: Phasen des Streckennetzes Bad Neuenahr - Remagen - Linz und ihre Verzögerungszeiten

q_1	Ein Stadtverkehrbus befindet sich auf der Strecke durch Bad Neuenahr.	$\tau_1 = 22$
q_2	Ein Bus befindet sich auf dem Weg von Bad Neuenahr nach Remagen.	$\tau_2 = 23$
q_3	Ein Bus befindet sich auf dem Weg von Remagen nach Bad Neuenahr.	$\tau_3 = 25$
q_4	Eine Fähre befindet sich auf dem Weg von Remagen nach Linz.	$\tau_4 = 8$
q_5	Eine Fähre befindet sich auf dem Weg von Linz nach Remagen.	$\tau_5 = 8$
q_6	Ein Bus befindet sich auf der Schleife durch Linz.	$\tau_6 = 15$

Mit Hilfe dieser Informationen ergibt sich der folgende Synchronisationsgraph:

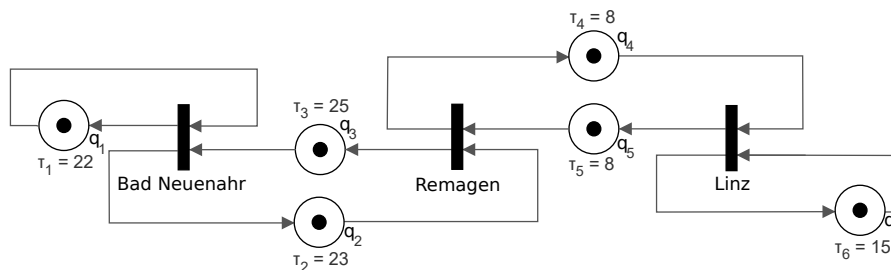


Abbildung 19: Synchronisationsgraph zum Streckennetz Bad Neuenahr - Remagen - Linz

Der entscheidende Unterschied fällt sofort auf: Im Gegensatz zum vorherigen Synchronisationsgraphen sind hier alle Phasen markiert. Der Grund hierfür ist, dass sich zu Beginn beim ursprünglichen Graphen auf jeder Kante ein Transportmittel befand. Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden dargestellten Verkehrsnetzen besteht darin, dass das Ausgangsbeispiel ausschließlich synchronisierte Phasen besitzt. An allen drei Stationen musste das langsamste von zwei eintreffenden Verkehrsmitteln betrachtet werden. Alle nicht synchronisierten Zwischenstopps wurden als Teil einer Schleife zusammengefasst und nicht weiter berücksichtigt. In unserem neuen Beispiel möchten wir einen vollständigen Busfahrplan erstellen, für den natürlich auch die Ankunfts- und Abfahrtszeiten von nicht-synchronisierten Stationen von Interesse sind.

Übung 9.

Schaut euch nochmal das einleitende Ampelbeispiel an und erstellt für dieses einen Synchronisationsgraphen. Die Ampel soll sich aktuell in Phase t_1 befinden. Die Hauptstraße soll gerade stark befahren sein, sodass die Induktionsschleife gerade auslöst, während an der Nebenstraße kein Auto steht.

4.2 Erstellung des Fahrplans

Kehren wir zurück zu unseren Buslinien. Das Ziel ist es, eine Matrix für den Synchronisationsgraphen zu erstellen, die berücksichtigt, dass nur zwei Busse auf der Linie fahren und diese in Troisdorf beziehungsweise Euskirchen starten. Dafür stellen wir jeweils eine Gleichung für die $(k + 1)$ -te Markierung der verschiedenen



Stellen in Abhängigkeit von den Markierungszeitpunkten der zeitlich vor ihnen markierten Stellen auf und formen sie so um, dass sie nur noch abhängig von den k -ten Markierungszeitpunkten vom Start in Troisdorf und Euskirchen, welche wir analog zu den Abfahrtszeiten in Kapitel 3 mit $x_1(k)$ und $x_2(k)$ bezeichnen, sind. Dabei starten wir mit der Verzögerungszeit, die nach dem Start benötigt wird, um den Hauptbahnhof zu erreichen und setzen für den Beginn der weiteren Phasen so lange die Verzögerungszeiten der vorausgehenden Phasen ein, bis wir erneut die Ausgangssituationen in Troisdorf und Euskirchen erreichen. Die Phase p_3 kann beginnen, wenn die Phasen p_1 und p_2 beide abgeschlossen sind. Um den Zeitpunkt der $(k + 1)$ -ten Markierung von p_3 zu bestimmen, addieren wir die Zeitpunkte der k -ten Markierung von p_1 und p_2 addiert mit der jeweiligen Verzögerungszeit und bilden davon das Maximum.

$$x_3(k + 1) = \max\{x_1(k) + 55, x_2(k) + 60\} = x_1(k) \odot 55 \oplus x_2(k) \odot 60$$

Den Zeitpunkt der $(k + 1)$ -ten Markierung von p_4 erhalten wir, indem wir den Zeitpunkt der $(k + 1)$ -ten Markierung der Phase p_3 mit deren Verzögerungszeit addieren. Setzen wir dabei die zuvor aufgestellte Gleichung für $x_3(k + 1)$ ein, so erhalten wir eine Gleichung für $x_4(k + 1)$ in Abhängigkeit der k -ten Markierung von p_1 und p_2 .

$$\begin{aligned} x_4(k + 1) &= x_3(k + 1) + 5 = (x_1(k) \odot 55 \oplus x_2(k) \odot 60) \odot 5 \\ &= x_1(k) \odot 60 \oplus x_2(k) \odot 65 \end{aligned}$$

Übung 10.

Wir erstellen nun weitere Gleichungen für die $(k + 1)$ -ten Markierungen. Es empfiehlt sich, möglichst viele dieser Gleichungen selbst aufzustellen. Dadurch könnt ihr euch selbst kontrollieren und sichergehen, dass ihr verstanden habt, wie diese Gleichungen zustande kommen. Die weiteren Gleichungen folgen direkt nach der Aufgabenstellung und nicht im Anhang, da wir sie zur Erstellung unserer Matrix benötigen.

$$\begin{aligned} x_5(k + 1) &= x_3(k + 1) + 5 = (x_1(k) \odot 55 \oplus x_2(k) \odot 60) \odot 5 \\ &= x_1(k) \odot 60 \oplus x_2(k) \odot 65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_6(k + 1) &= x_4(k + 1) + 40 = (x_1(k) \odot 60 \oplus x_2(k) \odot 65) \odot 40 \\ &= x_1(k) \odot 100 \oplus x_2(k) \odot 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_7(k + 1) &= x_5(k + 1) + 45 = (x_1(k) \odot 60 \oplus x_2(k) \odot 65) \odot 45 \\ &= x_1(k) \odot 105 \oplus x_2(k) \odot 110 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_8(k + 1) &= \max\{x_6(k + 1) + 40, x_7(k + 1) + 45\} \\ &= (x_1(k) \odot 100 \oplus x_2(k) \odot 105) \odot 40 \oplus (x_1(k) \odot 105 \oplus x_2(k) \odot 110) \odot 45 \\ &= (x_1(k) \odot 140 \oplus x_2(k) \odot 145) \oplus (x_1(k) \odot 150 \oplus x_2(k) \odot 155) \\ &= x_1(k) \odot 150 \oplus x_2(k) \odot 155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_9(k + 1) &= x_8(k + 1) + 5 = (x_1(k) \odot 150 \oplus x_2(k) \odot 155) \odot 5 \\ &= x_1(k) \odot 155 \oplus x_2(k) \odot 160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{10}(k + 1) &= x_8(k + 1) + 5 = (x_1(k) \odot 150 \oplus x_2(k) \odot 155) \odot 5 \\ &= x_1(k) \odot 155 \oplus x_2(k) \odot 160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11}(k + 1) &= x_9(k + 1) + 55 = (x_1(k) \odot 155 \oplus x_2(k) \odot 160) \odot 55 \\ &= x_1(k) \odot 210 \oplus x_2(k) \odot 215 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(k+1) &= x_{10}(k+1) + 60 = (x_1(k) \odot 155 \oplus x_2(k) \odot 160) \odot 60 \\
&= x_1(k) \odot 215 \oplus x_2(k) \odot 220
\end{aligned}$$

Nun können wir eine Matrix aufstellen, die die Fahrzeiten der Buslinien beschreibt, wenn sie von Troisdorf und Euskirchen starten. Aus der Matrix für $x(k+1)$ leiten wir unsere Übergangsmatrix A als *Faktor* für einen Vektor $x(k)$, der die Zeiten der k -ten Markierungen angibt, ab.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} x_1(k) \odot 210 \oplus x_2(k) \odot 215 \\ x_1(k) \odot 215 \oplus x_2(k) \odot 220 \\ x_1(k) \odot 55 \oplus x_2(k) \odot 60 \\ x_1(k) \odot 60 \oplus x_2(k) \odot 65 \\ x_1(k) \odot 60 \oplus x_2(k) \odot 65 \\ x_1(k) \odot 100 \oplus x_2(k) \odot 105 \\ x_1(k) \odot 105 \oplus x_2(k) \odot 110 \\ x_1(k) \odot 150 \oplus x_2(k) \odot 155 \\ x_1(k) \odot 155 \oplus x_2(k) \odot 160 \\ x_1(k) \odot 155 \oplus x_2(k) \odot 160 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 210 & 215 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 215 & 220 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 55 & 60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 60 & 65 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 60 & 65 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 100 & 105 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 105 & 110 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 150 & 155 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 155 & 160 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 155 & 160 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}}_A \odot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \\ x_9(k) \\ x_{10}(k) \end{pmatrix}$$

Anhand der Matrix A lassen sich die für unseren Fahrplan notwendigen Informationen direkt auslesen. Unseren kritischen Zyklus können wir in der Diagonalen auslesen. Vom Start in Troisdorf bis zum nächsten Start in Troisdorf werden 210 Minuten benötigt. Zwischen dem Start in Euskirchen und dem nächsten möglichen Start in Euskirchen liegen 220 Minuten. Unsere optimale Taktzeit und der Eigenwert λ liegt also bei 220 Minuten. Den Eigenvektor können wir aufgrund der einfachen Struktur der Matrix ebenfalls ohne weitere Rechnungen bestimmen. Da bei Matrix A sämtliche Einträge der zweiten Spalte größer sind als die der ersten Spalte und der Wert der zweiten Zeile größer, als der der ersten Zeile, können wir diese für den Eigenvektor übernehmen, denn es gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 210 & 215 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 215 & 220 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 55 & 60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 60 & 65 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 60 & 65 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 100 & 105 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 105 & 110 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 150 & 155 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 155 & 160 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 155 & 160 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}}_A \odot \underbrace{\begin{pmatrix} 215 \\ 220 \\ 60 \\ 65 \\ 65 \\ 105 \\ 110 \\ 155 \\ 160 \\ 160 \end{pmatrix}}_v = \begin{pmatrix} \max\{215 + 210, 220 + 215\} \\ \max\{215 + 215, 220 + 220\} \\ \max\{215 + 55, 220 + 60\} \\ \max\{215 + 60, 220 + 65\} \\ \max\{215 + 60, 220 + 65\} \\ \max\{215 + 100, 220 + 105\} \\ \max\{215 + 105, 220 + 110\} \\ \max\{215 + 150, 220 + 155\} \\ \max\{215 + 155, 220 + 160\} \\ \max\{215 + 155, 220 + 160\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 435 \\ 440 \\ 280 \\ 285 \\ 285 \\ 325 \\ 330 \\ 375 \\ 380 \\ 380 \end{pmatrix} = \underbrace{220}_\lambda \odot \underbrace{\begin{pmatrix} 215 \\ 220 \\ 60 \\ 65 \\ 65 \\ 105 \\ 110 \\ 155 \\ 160 \\ 160 \end{pmatrix}}_v$$

Nun möchten wir unsere Matrix A und den Eigenvektor nutzen, um einen regelmäßigen Fahrplan für unsere beiden Busse aufzustellen. Die Startzeit wählen wir so, dass der Bus in Troisdorf fünf Minuten früher startet als der Bus in Euskirchen, da der erste Wert des Eigenvektors um fünf kleiner ist als der zweite Wert des Eigenvektors. Da wir nur Busse von der ersten und zweiten Station starten lassen, sind die weiteren Werte des Eigenvektors für die Startzeit irrelevant. Die Werte geben an, wann in die nächste Phase übergegangen werden kann. Nach 60 Minuten startet beispielsweise die Umsteigezeit am Hauptbahnhof. Nach 65 Minuten erfolgt sowohl die Abfahrt zum Phantasialand, als auch nach Bad Honnef. Die Abfahrtszeiten können wir also dem

Eigenvektor entnehmen. Für unseren Busfahrplan möchten wir aber auch die Ankunftszeiten notieren. Da die Phasen p_3 und p_8 , die der Umsteigezeit entsprechen, erst beginnen, wenn beide Busse am Bahnhof angekommen sind, können wir die Ankunftszeit des früheren Busses nicht aus dem Vektor auslesen, sondern die Zeit, zu der beide Busse am Hauptbahnhof sind und die Umsteigephase beginnt. Die Information der Ankunftszeit des früheren Busses entnehmen wir der ersten Spalte von Matrix A , da nur der Bus der Linie 1 warten muss, bevor der Übergang in die nächste Phase erfolgen kann.

Für unseren Fahrplan legen wir fest, dass Linie 1 um 06:55 Uhr und Linie 2 um 07:00 Uhr startet.

Tabelle 24: Fahrplan der Linie 1:

Haltestelle	Ankunft	Abfahrt	Ankunft	Abfahrt	Ankunft	Abfahrt	Ankunft	Abfahrt	Ankunft
Troisdorf	-	06:55	10:35	10:35	14:15	14:15	17:55	17:55	21:35
Bonn Hbf	07:50	08:05	11:30	11:45	15:10	15:25	18:50	19:05	-
Phantasialand	08:45	08:45	12:25	12:25	16:05	16:05	19:45	19:45	-
Bonn Hbf	09:25	09:40	13:05	13:20	16:45	17:00	20:25	20:40	-

Tabelle 25: Fahrplan der Linie 2:

Haltestelle	Ankunft	Abfahrt	Ankunft	Abfahrt	Ankunft	Abfahrt	Ankunft	Abfahrt	Ankunft
Euskirchen	-	07:00	10:40	10:40	14:20	14:20	18:00	18:00	21:40
Bonn Hbf	8:00	08:05	11:40	11:45	15:20	15:25	19:00	19:05	-
Bad Honnef	08:50	08:50	12:30	12:30	16:10	16:10	19:50	19:50	-
Bonn Hbf	09:35	09:40	13:15	13:20	16:55	17:00	20:35	20:40	-

Somit haben wir einen Fahrplan entwickelt, für den die Ankünfte und Abfahrten sämtlicher Stationen alle 220 Minuten erfolgen. Wenn die Abfahrten häufiger erfolgen sollen, können wir jeweils einen weiteren Bus für die beiden Buslinien einsetzen, der im selben Rhythmus um 110 Minuten versetzt zu unserem Fahrplan fährt. Dadurch würden die Stationen alle 110 Minuten angefahren werden. Der Einsatz von insgesamt fünf Bussen je Linie ermöglicht dementsprechend Fahrten im 44 Minuten Takt. Dafür lassen wir sowohl in Troisdorf, als auch in Euskirchen 44 Minuten nach der ersten Abfahrt den zweiten Bus der Linie starten. Die weiteren Busse starten jeweils 44 Minuten nach dem vorherigen. Da wir die Fahrten anhand des Eigenvektors durchführen, halten auch die weiteren Busse eine regelmäßige Taktzeit ein.

Wir haben das Verfahren zum Aufstellen eines Fahrplans hier nur exemplarisch an einem einfachen Beispiel durchgeführt, damit die Matrizen nicht noch eine deutlich größere Dimension annehmen. Dennoch kann das von uns eingesetzte Verfahren nun leicht verallgemeinert werden, sodass es auch für deutlich komplexere Graphen eingesetzt werden kann. Das Verfahren zur Bestimmung von A kann algorithmisiert und damit auch mit einem Computer berechnet werden. Auf diese Weise können auch sehr komplexe Fahrpläne mit vielseitigen Anforderungen erstellt werden.

4.3 Interpretation der Einträge einer Gesamtmatrix

Die Herleitung einer Matrix aus dem Synchronisationsgraphen, die die Startstationen berücksichtigt und deren Eigenwert unserer Taktzeit entspricht, hat es uns ermöglicht, unseren Fahrplan anhand des Eigenvektors zu erstellen. Wir können aber auch anhand eines herkömmlichen Graphen viele Informationen ablesen und bestimmen. Dafür definieren wir die Knoten als Zeitpunkte und die Kanten als Zeit, die zwischen zwei Zeitpunkten mindestens vergehen muss.

Tabelle 26: Bedeutung der Knoten im folgenden Graphen

Knoten	Zeitpunkt
p_1	Abfahrt in Troisdorf
p_2	Abfahrt in Euskirchen
p_3	Zeitpunkt, zu dem beide Busse am Bahnhof angekommen sind
p_4	Zeitpunkt der Abfahrt des Busses zum Phantasialand
p_5	Zeitpunkt der Abfahrt des Busses nach Bad Honnef
p_6	Abfahrt vom Phantasialand
p_7	Abfahrt aus Bad Honnef
p_8	Zeitpunkt, zu dem beide Busse am Bahnhof angekommen sind
p_9	Zeitpunkt der Abfahrt des Busses nach Troisdorf
p_{10}	Zeitpunkt der Abfahrt des Busses nach Euskirchen

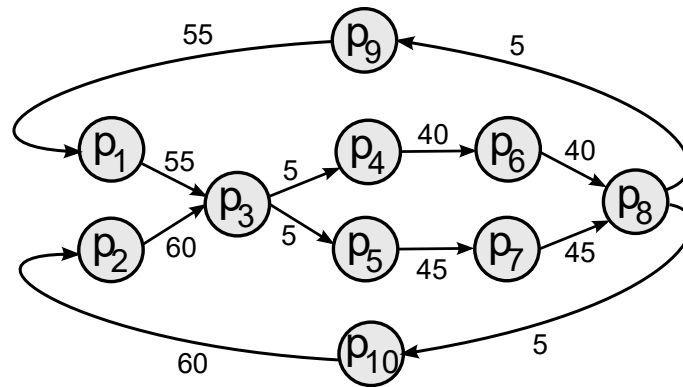


Abbildung 20: Herkömmliche graphische Darstellung des Verlaufs der Buslinien

Die zulässigen Phasenübergänge werden durch die Kanten weiterhin richtig dargestellt. Auch die Phasendauern können durch die Gewichtung der Kanten abgelesen werden. Was dieser Graph nicht mehr enthält, ist die Information zur Ausgangssituation mit zwei Bussen, die in Troisdorf und Euskirchen starten. Diesen Graphen können wir so interpretieren, als würde es wie im vorherigen Kapitel auf jeder Kante ein Transportmittel geben, welches vom folgenden Knoten abfährt, wenn die Transportmittel von allen eingehenden Kanten den Knoten erreichen.

Wir definieren die Matrix A_{ges} als Matrix, die wir anhand dieses Graphen erstellen.

Es reicht, die ersten sechs *Potenzen* zu bilden, da man mit ein- bis sechs-kantigen Wegen bereits von jeder Ausgangsstation alle Stationen erreichen kann. Aus der siebten Spalte und ersten Zeile der Matrix $A_{ges}^{\odot 3}$, deren Eintrag 105 beträgt, können wir beispielsweise ableiten, dass wir mit einer 105-minütigen Fahrzeit von Bad Honnef nach Troisdorf fahren können.

Wie im vorherigen Kapitel erstellen wir nun eine Matrix A_{ges}^+ , indem wir jeweils den größten Eintrag der Matrizen wählen.

$$A_{ges}^+ = A_{ges} \oplus A_{ges}^2 \oplus A_{ges}^3 \oplus A_{ges}^4 \oplus A_{ges}^5 \oplus A_{ges}^6 = \begin{pmatrix} 210 & 215 & 155 & 140 & 150 & 100 & 105 & 60 & 55 & \varepsilon \\ 215 & 220 & 160 & 145 & 155 & 105 & 110 & 65 & \varepsilon & 60 \\ 55 & 60 & 220 & 205 & 215 & 165 & 170 & 125 & 110 & 120 \\ 60 & 65 & 5 & 210 & 220 & 170 & 175 & 130 & 115 & 125 \\ 60 & 65 & 5 & 210 & 220 & 170 & 175 & 130 & 115 & 125 \\ 100 & 105 & 45 & 40 & \varepsilon & 210 & 215 & 170 & 155 & 165 \\ 105 & 110 & 50 & \varepsilon & 45 & 215 & 220 & 175 & 160 & 170 \\ 150 & 155 & 95 & 80 & 90 & 40 & 45 & 220 & 205 & 215 \\ 155 & 160 & 100 & 85 & 95 & 45 & 50 & 5 & 210 & 220 \\ 155 & 160 & 100 & 85 & 95 & 45 & 50 & 5 & 210 & 220 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix enthält nun Informationen zur Fahrzeit zwischen zwei beliebigen Ausgangspunkten. Bei der Interpretation dieser Matrix ist es wichtig sich bewusst zu machen, für welche Stationen die Knoten des zugehörigen Graphen stehen. p_4 und p_5 sind die Zeitpunkte der Abfahrten vom Hauptbahnhof, die zeitgleich erfolgen. Auffällig ist, dass die Einträge der siebten Zeile in der vierten Spalte und der sechsten Zeile in der fünften Spalte ε sind. Dies ist zunächst irritierend, da wir zu dem Schluss gekommen sind, dass alle Stationen innerhalb von sechs Kanten erreichbar sind. Überlegt man sich jedoch, welche Situation diese Einträge beschreiben, so ist schnell klar, warum die Knoten nicht voneinander erreichbar sind. Der Weg von Knoten p_4 zum Knoten p_7 beschreibt, dass wir am Bahnhof sind und den falschen der beiden Busse wählen, die zur selben Zeit abfahren. Wir fahren also nicht direkt nach Bad Honnef, sondern eine Extrarunde über das Phantasialand und Troisdorf bevor schließlich der Umstieg am Hauptbahnhof in den richtigen Bus nach Bad Honnef erfolgt. Statt weitere *Potenzen* zu bilden und somit auch für diese Einträge eine Fahrzeit zu erhalten, sollten wir einfach darauf achten in den richtigen Bus einzusteigen. Es ergibt also Sinn, die vierte und fünfte Spalte sowie die neunte und zehnte Spalte gemeinsam als Erreichbarkeiten vom Hauptbahnhof zu interpretieren. Wenn eine Station über beide Busse erreichbar ist, wird für Überlegungen zur Fahrzeit zwischen den Stationen der kürzere Wert berücksichtigt.

Übung 11.

Überlegt, welchem Eintrag der Matrix wir welche Information entnehmen können. Welcher Eintrag beschreibt die Fahrzeit von Euskirchen zum Phantasialand? Welcher Eintrag beschreibt die Fahrzeit von Bad Honnef zum Hauptbahnhof? Ihr könnt die Interpretation von A_{ges}^+ gut üben, indem ihr euch gegenseitig weitere Fragen stellt und die Antworten gemeinsam diskutiert.

Merkkasten zu Kapitel 4.

Zusammenfassung der wichtigsten Informationen aus dem Kapitel.

- Auch für Verkehrsnetze, die nicht den Gegebenheiten des vorherigen Kapitels entsprechen (z. B. wenn nicht an jeder Station eine Synchronisation erfolgt oder nicht an jedem Knoten Transportmittel starten), kann ein Fahrplan anhand von Eigenwert und Eigenvektor erstellt werden.
- Die Matrix A kann in diesem Fall nicht direkt abgelesen werden, sondern wird anhand eines Synchronisationsgraphen hergeleitet.
- Der Eigenwert der Matrix A entspricht der Taktzeit, der Eigenvektor der Fahrzeit bis zur nächsten Markierung der Stationen ausgehend vom Start.
- Durch Aufstellen der Matrix A_{ges} erhalten wir Informationen des Netzes, wenn von allen Stationen gestartet wird.
- Aus der Matrix $A_{ges}^+ = A_{ges} \oplus A_{ges}^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A_{ges}^{\odot n}$ können Informationen zu sämtlichen Fahrzeiten von einer Station zur anderen entnommen werden.

5 Max-Plus-Algebra-Anwendungen außerhalb des Fahrplankontexts

Wir haben uns nun mit verschiedenen Überlegungen zur Erstellung von Fahrplänen befasst. Dabei sind wir den Fragen nachgegangen, in welchem Takt regelmäßige Abfahrten möglich sind, wie sich Verspätungen auswirken und wo zusätzliche Transportmittel eingesetzt werden sollten, um den Takt zu erhöhen. Außerdem haben wir einen Fahrplan entworfen, aus welchem auch die Abfahrtszeiten an einzelnen Haltstellen hervorgehen. Neben der Fahrplanerstellung, bietet die Max-Plus-Algebra jedoch noch weitere Anwendungsmöglichkeiten. So können beispielsweise Produktionsabläufe ähnlich zur Erstellung von Fahrplänen koordiniert werden. Auch hier kann es notwendig sein, parallel verlaufende Prozesse zu synchronisieren. Ein ganz anderes Feld, in dem die Max-Plus-Algebra zum Einsatz kommt, stellt die tropische Geometrie dar. Durch die Operationen \oplus und \odot können komplizierte Kurven stark vereinfacht werden, wobei einige Eigenschaften, wie beispielsweise die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven, erhalten bleiben. Im Folgenden wollen wir uns ein Beispiel anschauen, in dem wir unser gelerntes Wissen nutzen können, um eine Spielstrategie zu entwickeln. Wir werden dabei keine neuen Techniken einführen, sodass ihr die Möglichkeit habt, bisher eingeführte Verfahren zu übertragen und zu überprüfen, ob ihr diese verstanden habt.

Euer neues Videospiel findet auf einem virtuellen Spielfeld, bestehend aus einem Netz von Wegen, statt. Die Wege treffen an den Hauptfeldern aufeinander. Die Felder eines Weges zwischen zwei Hauptfeldern nennen wir Nebenfelder. Die Anzahl der Nebenfelder eines Weges sind unterschiedlich. In jeder Runde müsst ihr euch entscheiden, welchen Weg ihr gehen möchtet.

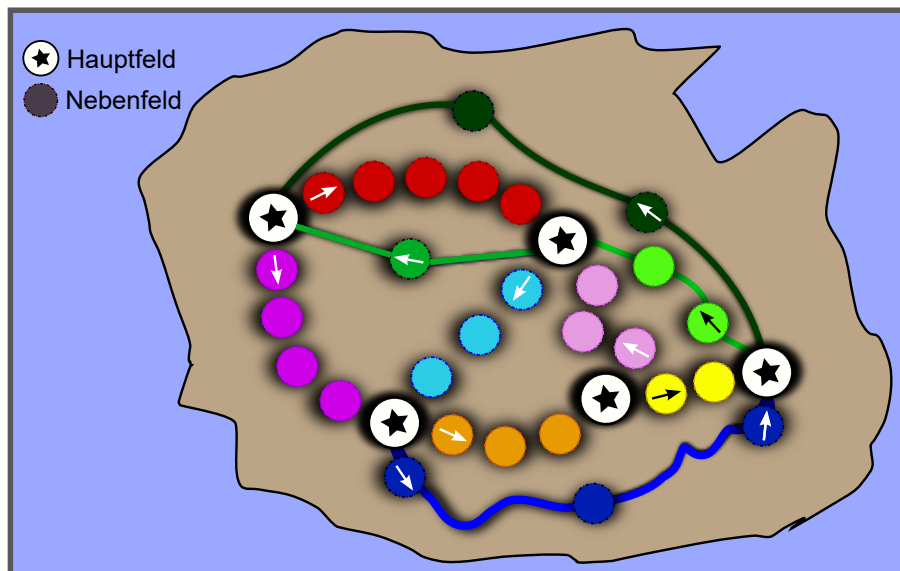


Abbildung 21: Aufbau des virtuellen Spielbretts

Ihr dürft euch immer von einem Hauptfeld zum nächsten bewegen, sofern ein direkter Weg von dem Hauptfeld auf dem ihr euch befindet zum nächsten Hauptfeld existiert. Während des Spielverlaufs könnt ihr durch die Erfüllung von Aufgaben Punkte sammeln. Am Ende des Spiels, nach 20 Runden, wird außerdem ein Bonus vergeben an die Person, die die meisten Nebenfelder überquert hat. Angenommen, ihr möchtet gerne diesen Bonus erhalten, für welche Wege solltet ihr euch entscheiden?

Es liegt nahe, dass man mit Hilfe eines mathematischen Modells des Spiels eine Gewinnstrategie entwickeln kann. Zur besseren Übersicht erstellen wir zunächst wieder einen Graphen, um die wesentlichen Informationen

darzustellen.

Wenn ihr üben möchtet, wie man einen Graphen und die dazugehörige Matrix erstellt, könnt ihr diese Stelle dazu nutzen. Überlegt euch, wie ihr die in der Abbildung enthaltenen Informationen in einen Graphen übertragen könnt. Welche Felder entsprechen den Knoten? Welche Kanten existieren und welche Bedeutung haben die Kantengewichte?

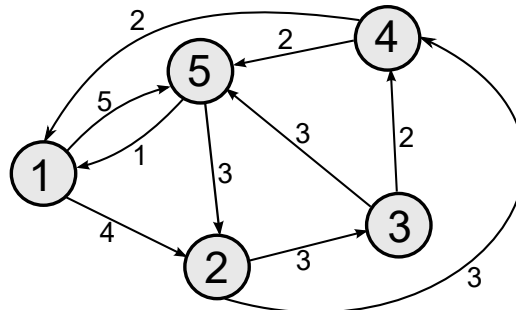


Abbildung 22: Graphische Darstellung des Spielbretts

Anhand des Graphen erstellen wir zudem die Matrix A , welche an der Stelle ij das Gewicht der Kante enthält, welche von Knoten j zu Knoten i verläuft. Gibt es keine solche Kante, so tragen wir ε ein.

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Um den Bonus zu gewinnen, müssen wir insgesamt mehr Nebenfelder überqueren als unser Gegner, d.h. wir brauchen ein möglichst großes Durchschnittsgewicht der gewählten Kanten. Um dieses zu bestimmen, erstellen wir wieder *Potenzen* von A , die das Gewicht von Wegen mit der *Potenz* entsprechender Kantenzahl angeben. Da wir über mehr Runden spielen als unser Graph Knoten besitzt, werden wir zwangsweise in Zyklen laufen. Daher bestimmen wir nun den Zyklus, der das größte durchschnittliche Kantengewicht besitzt. Dieses Verfahren sollte euch bereits bekannt vorkommen.

Wenn ihr das Bestimmen des maximalen durchschnittlichen Kantengewichts aller Zyklen üben möchtet, lest noch nicht weiter, sondern probiert das Verfahren selbst anzuwenden. Ihr könnt auch nur einzelne Schritte des Verfahrens üben. Wir weisen an den jeweiligen Stellen auf die Möglichkeit hin.

Wie wir bereits in Kapitel 3 gesehen haben, folgt aus Satz 1, dass wir nur die ersten fünf *Potenzen* von A berücksichtigen müssen, weil kein neuer relevanter Zyklus mit sechs Kanten oder mehr erschlossen werden kann. Jeder Zyklus dieser Form würde wieder kleinere Zyklen enthalten, die bereits betrachtet wurden.

Für das Gewicht unserer Zyklen sind nur die Einträge der Hauptdiagonalen von den *Potenzen* unserer Matrix relevant. Diese geben das Kantengewicht der Zyklen wieder, da die Start- und Endknoten der dazugehörigen Wege gleich sind. Dabei benennen wir nun den ii -ten Eintrag von $A^{\odot k}$ mit $a_{ii}^{\odot k}$. Um das Durchschnittsgewicht pro Kante zu ermitteln, teilen wir wie in unserem Beispiel zu Fahrplänen den Diagonaleintrag der k -ten *Potenz* von A durch k . Dieses Vorgehen können wir für alle *Potenzen* bis $A^{\odot 5}$ durchführen und übersichtlich in eine

Tabelle eintragen. Die Auswertung der *Potenzen* haben wir exemplarisch für die von Knoten „5“ ausgehenden Zyklen farblich markiert. Wir bilden für jeden Ausgangsknoten den maximalen Durchschnittswert der Zyklen und notieren diesen in der rechten Spalte. Der größte dieser Werte liefert uns das gesuchte maximale Durchschnittsgewicht der Zyklen des gesamten Graphen. Zur Übung empfiehlt es sich, die folgenden Potenzen und die sich daraus ergebene Tabelle nochmals selbst aufzustellen.

$$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & 6 & 6 & 5 \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \\ 7 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 6 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 8 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 10 & 9 \\ 11 & \varepsilon & 9 & 9 & 8 \\ 11 & 5 & 9 & 9 & 8 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 4} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 & 11 & 10 \\ 14 & 13 & 12 & 12 & 12 \\ 13 & 12 & 11 & 13 & 12 \\ 13 & 12 & 11 & 13 & 12 \\ 14 & 12 & 12 & 13 & 13 \end{pmatrix} \quad A^{\odot 5} = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 13 & 15 & 14 \\ 17 & 15 & 15 & 16 & 16 \\ 17 & 16 & 15 & 15 & 15 \\ 17 & 16 & 15 & 15 & 15 \\ 18 & 16 & 16 & 16 & 15 \end{pmatrix}$$

Hier bietet es sich an, anhand der *Potenzen* von A selbst das maximale Durchschnittsgewicht der Zyklen zu bestimmen.

Tabelle 27: Bestimmung des Eigenwerts über die Durchschnittsgewichte der Zyklen

<i>Potenz</i> Eintrag	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	$\max_{k=1,2,3,4,5} \frac{a_{ii}^{\odot k}}{k}$
11	$\frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$	$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{13}{4} = 3,25$	$\frac{15}{5} = 3$	3,25
22	$\frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{13}{4} = 3,25$	$\frac{15}{5} = 3$	3,25
33	$\frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{11}{4} = 2,75$	$\frac{15}{5} = 3$	3
44	$\frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{13}{4} = 3,25$	$\frac{15}{5} = 3$	3,25
55	$\frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$	$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{13}{4} = 3,25$	$\frac{15}{5} = 3$	3,25
$\max_{i=1,\dots,5} \max_{k=1,\dots,5} \frac{a_{ii}^{\odot k}}{k}$						3,25

In der Tabelle ist zu erkennen, dass das maximale Durchschnittsgewicht aller Zyklen 3,25 beträgt. Dieser Wert tritt in der Zeile von mehreren Ausgangsknoten auf, da diese Knoten an diesem *kritischen Zyklus* beteiligt sind. Der kritische Zyklus unseres Graphen ist 1-5-2-4-1, wobei von jedem dieser Knoten gestartet werden kann. Das Durchschnittsgewicht des kritischen Zyklus ist der Eigenwert der Matrix A, also $\lambda = 3,25$.

Nun können wir wieder die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen. Dazu ermitteln wir zunächst wieder die normierte Matrix:

Auch A_λ zu bestimmen, kann gut als Übung genutzt werden.

$$A_\lambda = -\lambda \odot A = -\frac{13}{4} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\frac{1}{4} \\ \varepsilon & -\frac{1}{4} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \varepsilon & \varepsilon \\ \frac{7}{4} & \varepsilon & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Graph der normierten Matrix hat dann die folgende Gestalt.

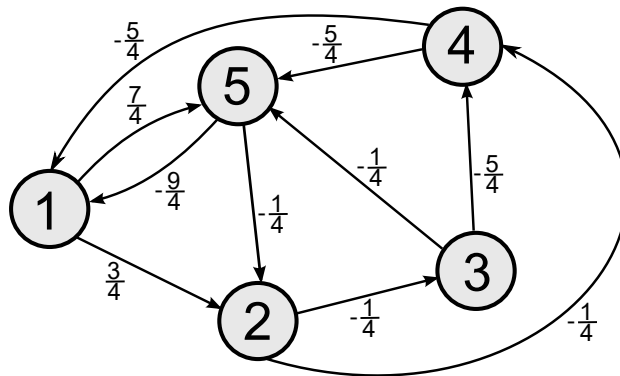


Abbildung 23: Graph der normierten Matrix A_λ

Für die *Potenzen* von A_λ erhalten wir:

$$A_\lambda^{\odot 2} = \begin{pmatrix} -0.5 & -1.5 & -2.5 & -3.5 & \varepsilon \\ 1.5 & \varepsilon & -0.5 & -0.5 & -1.5 \\ 0.5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -0.5 \\ 0.5 & -1.5 & \varepsilon & \varepsilon & -0.5 \\ \varepsilon & -0.5 & -2.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda^{\odot 3} = \begin{pmatrix} -0.75 & -2.75 & -4.75 & -1.75 & -1.75 \\ 0.25 & -0.75 & -1.75 & -0.25 & -0.75 \\ 1.25 & \varepsilon & -0.75 & -0.75 & -1.75 \\ 1.25 & -1.5 & -0.75 & -0.75 & -1.75 \\ 1.25 & 0.25 & -0.75 & -1.75 & -0.75 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda^{\odot 4} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda^{\odot 5} = \begin{pmatrix} -1.25 & -2.25 & -3.25 & -1.25 & -2.25 \\ 0.75 & -1.25 & -1.25 & -0.25 & -0.25 \\ 0.75 & -0.25 & -1.25 & -1.25 & -1.25 \\ 0.75 & -0.25 & -1.25 & -1.25 & -1.25 \\ 1.75 & -0.25 & -0.25 & -0.25 & -1.25 \end{pmatrix}.$$

Während der ersten Runden ist es sinnvoll, sich entsprechend dem von uns bestimmten kritischen Zyklus auf dem Spielfeld zu bewegen, weil man sich nach jedem Zyklus auch wieder in eine gute Ausgangslage bringt. Zum Ende hin kann es aber auch besser sein einen Weg zu wählen, der uns mehr überquerte Nebenfelder liefert, aber an einem Punkt endet, von dem eher ungünstige Kanten ausgehen. Die k -te *Potenz* von A_λ liefert einen guten Überblick darüber, welche Wege mit k Kanten welches Gewicht besitzen. Je größer der Wert desto höher das Gewicht des n -kantigen Wegs.

Wenn ihr üben möchtet, wie man anhand der *Potenzen* von A_λ Eigenvektoren von A bestimmt, bietet sich das an dieser Stelle gut an.

Wie bei der Koordinierung der Verkehrsmittel im dritten Kapitel, erhalten wir die maximalen durchschnittlichen Kantengewichte aller Wege mit 1 bis n Kanten aus der Matrix.

$$A_\lambda^+ = A_\lambda \oplus A_\lambda^{\odot 2} \oplus A_\lambda^{\odot 3} \oplus A_\lambda^{\odot 4} \oplus A_\lambda^{\odot 5} = \begin{pmatrix} 0 & -1.5 & -2 & -1.25 & -1.75 \\ 1.5 & 0 & -0.5 & 0.25 & -0.25 \\ 1.25 & -0.25 & -0.75 & 0 & -0.5 \\ 1.25 & -0.25 & -0.75 & 0 & -0.5 \\ 1.75 & 0.25 & -0.25 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen die am kritischen Zyklus beteiligten Knoten auch hier an der 0 in der Diagonale. Die entsprechenden Spalten sind insbesondere Eigenvektoren der Matrix zum Eigenwert λ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 1.25 \\ 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ -0.25 \\ -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1.25 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} -1.75 \\ -0.25 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluss dieses Vorbereitungsmaterials wollen wir noch anmerken, dass das Konzept von Eigenwerten und Eigenvektoren nicht nur in der Max-Plus-Algebra, sondern auch in der uns bekannten Algebra bezüglich der Multiplikation von Interesse ist, da sie wesentliche Eigenschaften linearer Abbildungen charakterisieren. Die normale Multiplikation von Matrizen wird ähnlich wie unsere \odot Rechnung durchgeführt. Die bei \odot addierten Werte aus der Zeile der ersten Matrix und der Spalte aus der zweiten Matrix werden hier multipliziert und anstatt dem Maximum dieser Werte summieren wir die einzelnen Produkte auf. Dafür betrachten wir ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-7) \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-7) \\ (-5) \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ergibt multipliziert mit ihrem Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ das gleiche Ergebnis wie

der Eigenwert $\lambda = -2$ multipliziert mit dem Eigenvektor.

Auch wenn sich das Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten in der uns bekannten Algebra von der Max-Plus-Algebra unterscheidet und differenzierte Interpretations- und Anwendungsmöglichkeiten bietet, soll dies nochmal zum Ausdruck bringen, wie viele Analogien zwischen diesen beiden Strukturen hergestellt werden können.

6 Anhang: Theoretische Hintergründe und Lösungsskizzen

Beweis von Satz 2.

Wir formulieren den Satz zunächst nochmal:

Satz 2.

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit zugehörigem Graphen G und λ der Eigenwert von A . Zudem sei $A_\lambda = -\lambda \odot A$ die um den Eigenwert verschobene Matrix und $A_\lambda^+ = A_\lambda \oplus A_\lambda^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A_\lambda^{\odot n}$ die Matrix, die das maximale Kantengewicht von Wegen mit höchstens n Kanten angibt. Dann gilt:

1. Wenn der k -te Diagonaleintrag der Matrix A_λ^+ den Wert 0 annimmt, so ist der entsprechende Spaltenvektor v_k ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .
2. Wenn v_i und v_j zwei Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind und die Knoten i und j auf dem selben kritischen Zyklus liegen, gibt es eine Konstante μ , sodass $v_i \odot \mu = v_j$.

Beweis von Aussage 1:

Für den Beweis definieren wir zunächst eine weitere Matrix A_λ^* durch

$$A_\lambda^* := E \oplus A_\lambda^+ = E \oplus A_\lambda \oplus A_\lambda^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A_\lambda^{\odot n-1}.$$

Das *Aufsummieren* der *Potenzen* kann beim Exponenten $k = n - 1$ abgebrochen werden, da nur noch die Diagonalarargumente von A_λ^n Kantengewichte von Pfaden enthalten, bei denen jeder Knoten nur einmal vorkommt. Diese spielen bei der *Aufsummierung* aber keine Rolle, da sie aufgrund der Normierung alle kleiner oder gleich 0 sind. Bei den Pfaden aller weiteren Einträge werden Knoten mehrfach erreicht. Dabei könnte lediglich das maximale Summenschleifengewicht, also 0, addiert werden. Die in E und A_λ bis A_λ^{n-1} enthaltenen maximalen Summenkantengewichte würden sich also nicht vergrößern. Es gilt also $A_\lambda^+ = A_\lambda \odot E \oplus A_\lambda \odot A_\lambda \oplus A_\lambda \odot A_\lambda^{\odot 2} \oplus \dots \oplus A_\lambda \odot A_\lambda^{n-1} = A_\lambda \odot A_\lambda^*$.

Da für einen Knoten k , der im kritischen Zyklus enthalten ist, das Diagonalarargument von A_λ^+ bereits Null ist, folgt aus der ersten Gleichung, dass die k -ten Spaltenvektoren von A_λ^+ und A_λ^* identisch sind, also $a_{\lambda_{ik}}^+ = a_{\lambda_{ik}}^*$.

Nun können wir zeigen, dass unsere k -ten Spaltenvektoren die Eigenschaft eines Eigenvektors erfüllen:

$$A \odot a_{\lambda_{ik}}^* = \lambda \odot A_\lambda \odot a_{\lambda_{ik}}^* = \lambda \odot a_{\lambda_{ik}}^+ = \lambda \odot a_{\lambda_{ik}}^*.$$

Die erste Umformung dürfen wir machen, weil durch die Addition von λ auf alle Einträge von A_λ die Verschiebung rückgängig gemacht wird und A erhalten. Die zweite Gleichheit gilt, weil aus $A_\lambda^+ = A \odot A_\lambda^*$ folgt, dass $A_\lambda \odot a_{\lambda_{ik}}^* = a_{\lambda_{ik}}^+$ ist.

Beweis von Aussage 2:

Wir nehmen uns zwei beliebige Eigenvektoren v_c und v_d aus der Matrix A_λ^+ , die Teil des gleichen kritischen

Zyklus sind, wobei

$$v_c = \begin{pmatrix} a_{1c} \\ a_{2c} \\ \vdots \\ a_{dc} \\ \vdots \\ a_{nc} \end{pmatrix} \quad v_d = \begin{pmatrix} a_{1d} \\ a_{2d} \\ \vdots \\ a_{cd} \\ \vdots \\ a_{nd} \end{pmatrix}.$$

Schauen wir eine beliebigen Zeile z von v_c an, dann entspricht der dort vorhandene Eintrag a_{zc} dem maximalen Kantengewicht für einen Weg von Knoten c zu Knoten z im Graph A_λ^+ . Dieser Wert ist auf jeden Fall nicht kleiner als der Weg von c zu Knoten z über den Knoten d . Analog gilt auch, dass der Weg vom Knoten d zu z kein kleineres Gewicht haben kann, als der Weg von d zu z über c .

$$a_{zc} \geq a_{zd} \odot a_{dc} \tag{1}$$

$$a_{zd} \geq a_{zc} \odot a_{cd} \tag{2}$$

Dass es einen Weg von c über d zu z und von d über c zu z gibt, ist bekannt, da c und d auf dem selben kritischen Zyklus liegen. Setzt man nun die zweite Gleichung in die erste ein, folgt:

$$a_{zc} \geq a_{zd} \odot a_{dc} \geq a_{zc} \odot a_{cd} \odot a_{dc}.$$

Da A_λ um den kritischen Zyklus verschoben ist, kann es in A_λ^+ keinen Zyklus mit einem positiven Kantengewicht geben. Damit folgt insbesondere auch, dass $a_{cd} + a_{dc} = 0$ gelten muss. Denn wäre $a_{cd} + a_{dc} > 0$, gäbe es in A_λ^+ einen Zyklus, der positives Kantengewicht hätte. Andersherum gilt: Wäre $a_{cd} + a_{dc} < 0$, wären c und d nicht Teil des gleichen kritischen Zyklus. Mit $a_{cd} + a_{dc} = 0$ kann die Ungleichung von eben erweitert werden:

$$a_{zc} \geq a_{zd} \odot a_{dc} \geq a_{zc} \odot a_{cd} \odot a_{dc} = a_{zc} + 0 = a_{zc}$$

Damit ergibt sich:

$$a_{zc} = a_{zd} \odot a_{dc}.$$

Da wir z beliebig gewählt haben, konnten wir also eine Konstante $\mu = a_{dc}$ finden, sodass

$$v_c = \mu \odot v_d.$$

□

Lösungsskizzen der Übungsaufgaben

Übung 1.

Berechnet die Werte folgender Terme

Lösung:

$$\begin{aligned} & 35 \oplus 42 \oplus \varepsilon \odot 105 \odot 8 \oplus 7 \\ = & \max\{35, 42, \varepsilon + 105 + 8, 7\} \\ = & \max\{35, 42, \varepsilon, 7\} \\ = & 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 999 \oplus (1902 \oplus 345 \oplus \varepsilon) \odot 98 \odot 22 \\ = & \max\{999, \max\{1902, 345, \varepsilon\} + 98 + 22\} \\ = & \max\{999, 1902 + 98 + 22\} \\ = & \max\{999, 2022\} \\ = & 2022 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 37 \odot (30 \oplus 9 \odot 15) \odot 44 \oplus (3 \odot 8 \oplus 10) \\ = & \max\{37 + \max\{30, 9 + 15\} + 44, \max\{3 + 8, 10\}\} \\ = & \max\{37 + 30 + 44, 11\} \\ = & 111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 74 \odot 26 \odot \varepsilon \odot 55 \odot (22 \oplus 36 \oplus 47) \oplus 65 \odot 8 \\ = & \max\{74 + 26 + \varepsilon + 55 + \max\{22, 36, 47\}, 65 + 8\} \\ = & \max\{\varepsilon, 73\} \\ = & 73 \end{aligned}$$

Übung 2.

a) Invertierbarkeit

- Gibt es für jedes a aus \mathbb{R}_{\max} ein Element b , welches ebenfalls in \mathbb{R}_{\max} liegt, sodass $a \oplus b = -\infty$?

Lösung:

Nein, ein solches Element gibt es nicht für jedes a aus \mathbb{R}_{\max} . Da $a \oplus b$ das Maximum aus a und b berechnet, gilt $a \oplus b = \max\{a, b\} \geq a$. Damit kann nur für $a = -\infty$ durch Wahl von $b = -\infty$ ein solches Element gefunden werden, sodass $a \oplus b = -\infty$.

- Gibt es für jedes a aus \mathbb{R}_{\max} ein Element b , welches ebenfalls in \mathbb{R}_{\max} liegt, sodass $a \odot b = 0$?

Lösung:

Nein. Für alle reellen Zahlen verhält sich die Operation \odot wie die uns bekannte Addition. Für jede reelle Zahl a können wir uns $b = -a$ wählen und erhalten $a \odot b = a + b = a + (-a) = 0$. Jedoch gibt es kein b , sodass $-\infty + b = 0$ gilt. Die Aussage gilt also für jede wählbare Zahl außer ε .

b) Min-Plus: Welche Art von Prozessen lassen sich mit einer „Min-Plus-Struktur“ auf $\mathbb{R}_{\min} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beschreiben, die durch

$$x \oplus y := \min\{x, y\} \quad x \odot y := x + y$$

definiert wird?

- Welche Art von Prozessen lassen sich mit einer Min-Plus-Struktur beschreiben?

Lösung:

Bei parallel verlaufenden zeitlichen Prozessen wird die kürzeste Zeit ausgewählt. Aufeinanderfolgende Prozesse werden wie in der Max-Plus-Algebra addiert. Die Min-Plus-Algebra kann zum Beispiel angewendet werden, um kürzeste beziehungsweise schnellste Wege zu finden.

- Besitzen die beiden Verknüpfungen neutrale Elemente?

Lösung:

Neutrales Element von \oplus : ∞

Neutrales Element von \odot : 0

- Erfüllen die Verknüpfungen Kommutativität?

Lösung:

$\min\{x, y\} = \min\{y, x\} \rightarrow$ Kommutativität ist für \oplus erfüllt.

$x + y = y + x \rightarrow$ Kommutativität ist für \odot erfüllt.

- Erfüllen die Verknüpfungen Assoziativität?

Lösung:

$\min\{x, \min\{y, z\}\} = \min\{x, y, z\} = \min\{\min\{x, y\}, z\} \rightarrow$ Assoziativität ist für \oplus erfüllt.

$x + (y + z) = x + y + z = (x + y) + z \rightarrow$ Assoziativität ist für \odot erfüllt.

- Erfüllen die Verknüpfungen Distributivität?

Lösung:

$x + \min\{y, z\} = \min\{x + y, x + z\} \rightarrow$ Distributivität ist für \odot und \oplus erfüllt.

- Sind die Verknüpfungen invertierbar?

Lösung:

Analog zur Max-Plus Algebra ist \oplus nicht invertierbar und \odot nur für reelle Zahlen invertierbar, da es für die Struktur kein inverses Element von ∞ gibt.

c) Potenzen und Potenzgesetze

- Prüft, welche Potenzgesetze aus unserer normalen Algebra sich auf die *Max-Plus-Potenzierung* übertragen lassen.

Lösung:

I: gleiche Basis

Gesetz in normaler Algebra: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

In Max-Plus-Algebra: $a^{\odot n} \odot a^{\odot m} = n \cdot a + m \cdot a = (n + m) \cdot a = a^{\odot(n \oplus m)}$

Das Gesetz lässt sich also nicht übertragen.

II: gleicher Exponent

Gesetz in normaler Algebra: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

In Max-Plus-Algebra: $a^{\odot n} \odot b^{\odot n} = n \cdot a + n \cdot b = n \cdot (a + b) = (a \odot b)^{\odot n}$

Das Gesetz lässt sich also übertragen.

III: Potenzieren von Potenzen

Gesetz in normaler Algebra: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

In Max-Plus-Algebra: $(a^{\odot n})^{\odot m} = m \cdot a^{\odot n} = m \cdot n \cdot a = a^{\odot(n \cdot m)} = a^{\odot(n \odot m)}$

Das Gesetz lässt sich also nicht übertragen.

- Überlegt, welcher Verknüpfung die *Max-Plus-Potenzierung* in unserer normalen Algebra entspricht.

Lösung:

Die *Potenzierung* in der Max-Plus-Algebra entspricht der Multiplikation in der konventionellen Algebra.

d) Biomische Formeln

- Wie können wir mit *Potenzen* von Binomen, wie zum Beispiel $(a \oplus b)^{\odot 2}$ umgehen?

Lösung:

$$\begin{aligned} & (a \oplus b)^{\odot 2} \\ = & (a \oplus b) \odot (a \oplus b) \\ = & (a \oplus b) + (a \oplus b) \\ = & 2 \cdot (a \oplus b) \\ = & 2 \cdot \max\{a, b\} \end{aligned}$$

- Gilt die erste binomische Formel noch?

Lösung:

$$(a \oplus b)^{\odot 2} = 2 \cdot \max\{a, b\}$$

$$a^{\odot 2} \oplus 2 \odot a \odot b \oplus b^{\odot 2} = \max\{2a, 2 + a + b, 2b\}$$

Die erste binomische Formel gilt übertragen auf die Max-Plus-Algebra nur, wenn $2 + a + b$ nicht das Maximum ist, also

$$\begin{aligned} 2 + a + b &\leq 2a & \text{oder} & & 2 + a + b &\leq 2b \\ \Rightarrow a - b &\geq 2 & & & \Rightarrow b - a &\geq 2. \end{aligned}$$

- Findet ihr eine allgemeine Formel für $(a \oplus b)^{\odot n}$?

Lösung:

$$(a \oplus b)^{\odot n} = n \cdot \max\{a, b\}$$

Übung 3.

Löst das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} 4 \odot x_1 \oplus 5 \odot x_2 \oplus 1 \odot x_3 = 6 \\ 2 \odot x_1 \oplus 7 \odot x_2 \oplus 3 \odot x_3 = 7 \\ 4 \odot x_1 \oplus 9 \odot x_2 \oplus 1 \odot x_3 = 8 \end{array} \right|$$

Lösung:

Tabelle 28: Aussagen des linearen Gleichungssystems

Variable \ Gleichung	x_1	x_2	x_3
(1)	$4 + x_1 \leq 6$	$5 + x_2 \leq 6$	$1 + x_3 \leq 6$
(2)	$2 + x_1 \leq 7$	$7 + x_2 \leq 7$	$3 + x_3 \leq 7$
(3)	$4 + x_1 \leq 8$	$9 + x_2 \leq 8$	$1 + x_3 \leq 8$

Anschließend isolieren wir unsere Variablen erneut und bestimmen die strengste Beschränkung.

Tabelle 29: Beschränkungen der Variablen

Variable \ Gleichung	x_1	x_2	x_3
(1)	$x_1 \leq 2$	$x_2 \leq 1$	$x_3 \leq 5$
(2)	$x_1 \leq 5$	$x_2 \leq 0$	$x_3 \leq 4$
(3)	$x_1 \leq 4$	$x_2 \leq -1$	$x_3 \leq 7$
Minimum	$\min\{2, 5, 4\} = 2$	$\min\{1, 0, -1\} = -1$	$\min\{5, 4, 7\} = 4$

Die Lösung des Gleichungssystems ist eindeutig, da jede Gleichung genau eine strengste Beschränkung enthält. Wir erfüllen die Gleichung, indem wir für die Variablen genau diese Werte einsetzen. Unsere Lösung ist also

$$x_1 = 2, x_2 = -1 \text{ und } x_3 = 4.$$

Übung 4.

Stellt Überlegungen an, welche Folgen die Verspätungen einzelner Transportmittel auf den gesamten Fahrplan haben. Wie und wie lange wirken sich Verspätungen auf die jeweiligen Linien aus? Probiert verschiedene Verspätungsszenarien aus. Orientiert euch dabei am Fahrplan, welcher aus Tabelle 12 abgelesen werden kann.

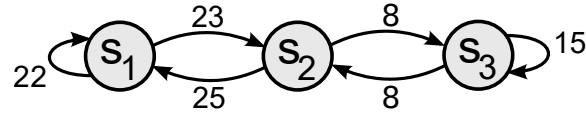


Abbildung 24: Graph des Streckennetzes Bad Neuenahr - Remagen - Linz

Lösung:

Wir gehen davon aus, dass wir uns bereits im regelmäßigen Takt befinden und die Abfahrten alle 24 Minuten erfolgen und betrachten exemplarisch einige Verspätungen.

- **Verspätung der Bad Neuenahr-Schleife:** Bei bis zu zwei Minuten Verspätung hat diese keinen Einfluss auf kommende Abfahrten. Hat der Bus mehr als zwei Minuten Verspätung, so muss der aus Remagen kommende Bus des kritischen Zyklus warten und alle Weiterfahrten verzögern sich.
- **Verspätung zwischen Bad Neuenahr und Remagen:** Eine Verspätung auf dieser Schleife wird in jedem Fall auf kommende Abfahrten übertragen, da es sich bei der Schleife um den kritischen Zyklus handelt, der den Takt vorgibt. Die Abfahrten in Bad Neuenahr und Remagen erfolgen immer unmittelbar nach der Ankunft dieser Transportmittel. Die Verspätung kann also nicht durch ohnehin vorhandene Wartezeit ausgeglichen werden.
- **Verspätung der Linz-Schleife:** Bei bis zu 9 Minuten Verspätung hat diese keinen Einfluss auf kommende Abfahrten, da die nächste Abfahrt in Linz erst nach 24 Minuten erfolgen soll. Hat der Bus mehr als 9 Minuten Verspätung, so überträgt sich die Verspätung auf die Fähre, die nach Remagen fährt. Der Tabelle 12, die die Abfahrtszeiten wiedergibt, können wir entnehmen, dass zwischen einer Abfahrt in Linz und der nächsten Abfahrt in Remagen 40 Minuten liegen. Die Fähre hat eine Fahrzeit von 8 Minuten, um von Linz nach Remagen zu gelangen. Solange die Fähre also weniger als 32 Minuten Verspätung hat, verzögert sich die nächste Abfahrt in Remagen nicht. Die Verspätung der Linz-Schleife wirkt sich also nur langfristig auf das Verkehrsnetz aus, wenn sie mehr als $9+32=41$ Minuten beträgt.

Übung 5.

Betrachtet den aktuellen Fahrplan und überlegt euch, welche Schleife nun unserem *kritischen Zyklus* entspricht, also das entscheidende Element des Netzes ist, welches die Frequenz der Abfahrten bestimmt. Wie wirkt sich das Hinzufügen eines Busses beziehungsweise einer Fähre auf die verschiedenen Schleifen aus?

Lösung:

Mit einem durchschnittlichen Kantengewicht von $\frac{48}{3} = 16$ ist nun wieder die Schleife zwischen Bad Neuenahr und Remagen der kritische Zyklus. Auch bei optimalen Startzeiten können wir nicht unter den durch diesen Zyklus vorgegebenen 16-Minuten-Takt der Abfahrten kommen. Würden wir einen weiteren Bus auf dieser Schleife

fahren lassen, so stellt die Linz-Schleife den neuen kritischen Zyklus dar und gibt eine durchschnittliche Taktzeit von 15 Minuten vor, die durch passende Startzeiten zur regelmäßigen Taktzeit von 15 Minuten modifiziert werden kann. Ein zusätzliches Transportmittel auf einer anderen Schleife, die nicht dem kritischen Zyklus entspricht, einzusetzen, würde keine Auswirkungen auf die Taktzeit haben, da diese weiterhin vom Durchschnittsgewicht des kritischen Zyklus festgelegt wird.

Übung 6.

Stellt die Matrix C für das Verkehrsnetz mit zwei zusätzlichen Bussen auf.

Lösung:

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 22 \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 15 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Übung 7.

Berechnet folgende Matrizen.

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max\{\varepsilon + 4, 5 + 8, 9 + 2\} & \max\{0 + 4, 2 + 8, 8 + 2\} & \max\{9 + 4, 4 + 8, 3 + 2\} \\ \max\{\varepsilon + 0, 7 + 5, 9 + 6\} & \max\{0 + 0, 2 + 7, 8 + 6\} & \max\{9 + 0, 4 + 7, 3 + 6\} \\ \max\{\varepsilon + 1, 5 + \varepsilon, 9 + 4\} & \max\{0 + 1, 2 + \varepsilon, 8 + 4\} & \max\{9 + 1, 4 + \varepsilon, 3 + 4\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 10 & 13 \\ 15 & 14 & 11 \\ 13 & 12 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \max\{4 + \varepsilon\} & \max\{8 + 0\} & \max\{2 + 9\} \\ \max\{0 + 5\} & \max\{7 + 2\} & \max\{6 + 4\} \\ \max\{1 + 9\} & \max\{\varepsilon + 8\} & \max\{3 + 4\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \max\{4 + 0, 6 + 7, 0 + 4, 7 + 5\} \\ \max\{4 + \varepsilon, 6 + 3, 0 + 1, 7 + 8\} \\ \max\{4 + 6, 6 + 5, 0 + 2, 7 + 7\} \\ \max\{4 + 9, 6 + 4, 0 + 8, 7 + 3\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \max\{7+5, 6+2, 4+2, 9+7\} \\ \max\{7+3, 6+5, 4+8, 9+1\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(e) Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. Berechne $M^{\odot 2} := M \odot M$.

Lösung:

$$M^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 & 5 & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 8 \\ 10 & 13 & 5 \\ 17 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Übung 8.

Bestimmt den Eigenwert und Eigenvektor der beiden Matrizen, die sich durch das Hinzufügen von zusätzlichen Bussen ergeben haben. Ihr könnt euer Ergebnis leicht kontrollieren, indem ihr überprüft, ob die Gleichung $A \odot v = \lambda \odot v$ erfüllt ist.

Lösung:

$$B = \begin{pmatrix} 22 & \varepsilon & \varepsilon & 25 \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 22 \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 15 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Eigenwerts von B :

1. Aufstellen der ersten vier *Potenzen* der Matrix:

$$B^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 44 & 25 & \varepsilon & 47 \\ 45 & 16 & 23 & 48 \\ 31 & 23 & 30 & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad B^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 66 & 47 & 33 & 69 \\ 67 & 48 & 38 & 70 \\ 53 & 38 & 45 & 56 \\ 45 & 16 & 23 & 48 \end{pmatrix} \quad B^{\odot 4} = \begin{pmatrix} 88 & 69 & 55 & 91 \\ 89 & 70 & 56 & 92 \\ 75 & 56 & 60 & 78 \\ 67 & 48 & 38 & 70 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmung der durchschnittlichen Kantengewichte der Zyklen:

Tabelle 30: Durchschnittliches Kantengewicht der Zyklen

Eintrag \ Potenz	11	22	33	44
$k = 1$	22	ε	15	ε
$k = 2$	$\frac{44}{2} = 22$	$\frac{16}{2} = 8$	$\frac{30}{2} = 15$	$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$k = 3$	$\frac{66}{3} = 22$	$\frac{48}{3} = 16$	$\frac{45}{3} = 15$	$\frac{48}{3} = 16$
$k = 4$	$\frac{88}{4} = 22$	$\frac{70}{4}$	$\frac{60}{4} = 15$	$\frac{70}{4}$

Der maximale Eintrag in unserer Tabelle ist unser Eigenwert $\lambda = 22$.

Bestimmung des Eigenvektors von B :

1. Aufstellen der normierten Matrix $B_\lambda = -\lambda \odot B$ und der ersten vier Potenzen:

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 1 & \varepsilon & -14 & \varepsilon \\ \varepsilon & -14 & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & -22 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad B_\lambda^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 0 & -19 & \varepsilon & 3 \\ 1 & -28 & -21 & 4 \\ -13 & -21 & -14 & \varepsilon \\ -21 & \varepsilon & -36 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$B_\lambda^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 0 & -19 & -33 & 3 \\ 1 & -18 & -28 & 4 \\ -13 & -28 & -21 & -10 \\ -21 & -50 & -43 & -18 \end{pmatrix} \quad B_\lambda^{\odot 4} = \begin{pmatrix} 0 & -19 & -33 & 3 \\ 1 & -18 & -32 & 4 \\ -13 & -32 & -28 & -10 \\ -21 & -40 & -50 & -18 \end{pmatrix}$$

2. Aufstellen der Matrix B_λ^+

$$B_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & -19 & -33 & 3 \\ 1 & -18 & -14 & 4 \\ -13 & -14 & -7 & -4 \\ -21 & -22 & -36 & -18 \end{pmatrix}$$

Den Eigenvektor können wir aus der ersten Spalte auslesen, da das Diagonalargument Null ist.

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -13 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Eigenvektor mit ausschließlich nicht-negativen Zahlen, indem wir alle Einträge mit 21 addieren.

$$v' = \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wählen wir die Startzeit an der jeweiligen Station entsprechend dieses Vektors, so erhalten wir regelmäßige Abfahrtszeiten im 22-Minuten-Takt.

Bestimmung des Eigenwerts von C :

1. Aufstellen der ersten fünf *Potenzen* der Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 22 \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 15 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad C^{\circ 2} = \begin{pmatrix} 22 & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 16 & 23 & 48 & 45 \\ 31 & 23 & 30 & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 22 \end{pmatrix} \quad C^{\circ 3} = \begin{pmatrix} 48 & \varepsilon & 33 & 47 & 44 \\ 45 & 48 & 38 & \varepsilon & \varepsilon \\ 46 & 38 & 45 & 56 & 53 \\ \varepsilon & 16 & 23 & 48 & 45 \\ 22 & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C^{\circ 4} = \begin{pmatrix} 44 & 47 & 48 & 73 & 70 \\ 71 & 46 & 56 & 70 & 67 \\ 61 & 56 & 60 & 71 & 68 \\ 45 & 48 & 38 & \varepsilon & \varepsilon \\ 48 & \varepsilon & 33 & 47 & 44 \end{pmatrix} \quad C^{\circ 5} = \begin{pmatrix} 70 & 73 & 63 & 69 & 66 \\ 69 & 70 & 71 & 96 & 93 \\ 79 & 71 & 75 & 86 & 83 \\ 71 & 46 & 56 & 70 & 67 \\ 44 & 47 & 48 & 73 & 70 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmung der durchschnittlichen Kantengewichte der Zyklen:

Tabelle 31: Durchschnittliches Kantengewicht der Zyklen

Eintrag	11	22	33	44	55
Potenz					
k = 1	ε	ε	15	ε	ε
k = 2	$\frac{22}{2} = 11$	$\frac{16}{2} = 8$	$\frac{30}{2} = 15$	ε	$\frac{22}{2} = 11$
k = 3	$\frac{48}{3} = 16$	$\frac{48}{3} = 16$	$\frac{45}{3} = 15$	$\frac{48}{3} = 16$	ε
k = 4	$\frac{44}{4} = 11$	$\frac{46}{4} = \frac{23}{2}$	$\frac{60}{4} = 15$	ε	$\frac{44}{4} = 11$
k = 5	$\frac{70}{5} = 14$	$\frac{70}{5} = 14$	$\frac{75}{5} = 15$	$\frac{70}{5} = 14$	$\frac{70}{5} = 14$

Der maximale Eintrag in unserer Tabelle ist unser Eigenwert $\lambda = 16$.

Bestimmung des Eigenvektors von C :

1. Aufstellen der normierten Matrix $A_\lambda = -\lambda \odot C$ und der ersten fünf *Potenzen*:

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 6 \\ 7 & \varepsilon & -8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -8 & -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad C_\lambda^{\odot 2} = \begin{pmatrix} -10 & -7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -16 & -9 & 16 & 13 \\ -1 & -9 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ -9 & \varepsilon & -24 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -7 & -10 \end{pmatrix} \quad C_\lambda^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & -15 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & -10 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -10 & -3 & 8 & 5 \\ \varepsilon & -32 & -25 & 0 & -3 \\ -26 & -23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C_\lambda^{\odot 4} = \begin{pmatrix} -20 & -17 & -16 & 9 & 6 \\ 7 & -18 & -8 & 6 & 3 \\ -3 & -8 & -4 & 7 & 4 \\ -19 & -16 & -26 & \varepsilon & \varepsilon \\ -16 & \varepsilon & -31 & -17 & -20 \end{pmatrix} \quad C_\lambda^{\odot 5} = \begin{pmatrix} -10 & -7 & -17 & -11 & -14 \\ -11 & -10 & -9 & 16 & 13 \\ -1 & -9 & -5 & 6 & 3 \\ -9 & -34 & -24 & -10 & -13 \\ -36 & -33 & -32 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

2. Aufstellen der Matrix C_λ^+

$$C_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -15 & 9 & 6 \\ 7 & 0 & -8 & 16 & 13 \\ -1 & -8 & -1 & 8 & 5 \\ -9 & -16 & -24 & 0 & -3 \\ -16 & -23 & -31 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

Den Eigenvektor können wir aus der ersten, zweiten oder vierten Spalte auslesen, da das Diagonalelement Null ist.

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \\ -9 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Eigenvektor mit ausschließlich nicht-negativen Zahlen, indem wir alle Einträge mit 16 addieren.

$$v' = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 15 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wählen wir die Startzeit an der jeweiligen Station entsprechend dieses Vektors, so erhalten wir regelmäßige Abfahrtszeiten im 16-Minuten-Takt.

Übung 9.

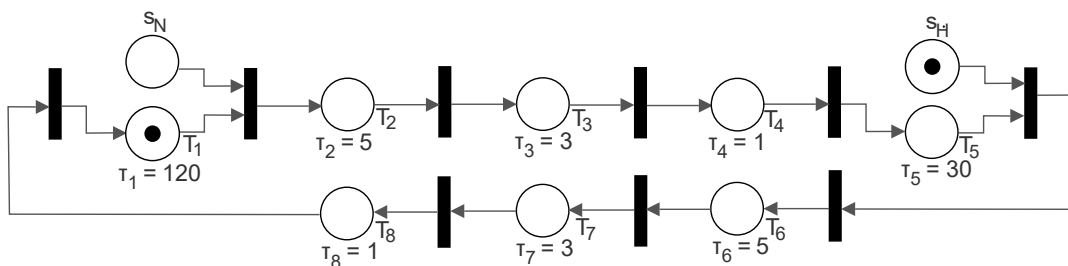
Schaut euch nochmal das einleitende Ampelbeispiel an und erstellt für dieses einen Synchronisationsgraphen.

Lösung:

Aus Abbildung 4 geht hervor, dass wir acht Ampelphasen haben sowie zwei Phasen, die eingeleitet werden, wenn die Induktionsschleife auslöst. Damit ergeben sich insgesamt 10 notwendige Stellen: Die zugehörigen Verzögerungszeiten lassen sich ebenfalls aus den Variablen t_1 bis t_8 ablesen.

T_1	Ampel Hauptstraße muss grün sein, Ampel Nebenstraße muss rot sein	$t_1 = 120$
T_2	Ampel Hauptstraße gelb, Ampel Nebenstraße rot	$t_2 = 5$
T_3	Ampel Hauptstraße rot, Ampel Nebenstraße rot	$t_3 = 3$
T_4	Ampel Hauptstraße rot, Ampel Nebenstraße rotgelb	$t_4 = 1$
T_5	Ampel Hauptstraße muss rot sein, Ampel Nebenstraße muss grün sein	$t_5 = 30$
T_6	Ampel Hauptstraße rot, Ampel Nebenstraße gelb	$t_6 = 5$
T_7	Ampel Hauptstraße rot, Ampel Nebenstraße rot	$t_7 = 3$
T_8	Ampel Hauptstraße rotgelb, Ampel Nebenstraße rot	$t_8 = 1$
s_H	Induktionsschleife der Hauptstraße löst aus	-
s_N	Induktionsschleife der Nebenstraße löst aus	-

Wir modellieren die Stellen s_H und s_N so, dass sie keine Phasendauer haben. Wird einer dieser beiden Stellen markiert, so kann der Punkt anschließend sofort zur nächsten Transition weitergelangen. Neben der aktuellen Ampelphase T_1 wird zudem s_H markiert, da die entsprechende Induktionsschleife in diesem Moment auslöst. Damit kann die Ampelsteuerung durch folgenden Synchronisationsgraphen dargestellt werden:



Übung 11.

Überlegt, welchem Eintrag der Matrix wir welche Information entnehmen können. Welcher Eintrag beschreibt die Fahrzeit von Euskirchen zum Phantasialand? Welcher Eintrag beschreibt die Fahrzeit von Bad Honnef zum Hauptbahnhof? Ihr könnt die Interpretation von A_{ges}^+ gut üben, indem ihr euch gegenseitig weitere Fragen stellt und die Antworten gemeinsam diskutiert.

Lösung:

- Fahrzeit von Euskirchen zum Phantasialand: Spalte 2, Zeile 6 \rightarrow 105 Minuten
- Fahrzeit von Bad Honnef zum Hauptbahnhof: Spalte 7, Zeile 8 \rightarrow 45 Minuten