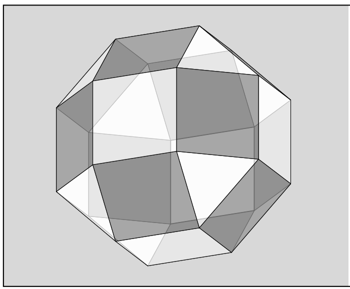


31. Mathematik-Turnier

Staffel 2022

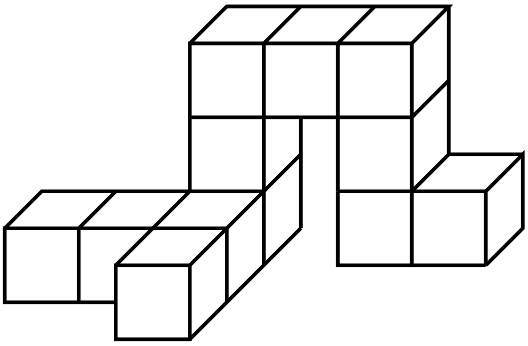
Radboud Universiteit

universität bonn

KU LEUVEN

Aufgabe 1 (20 Punkte, 2x)

Das folgende Objekt besteht aus zwölf zusammengeklebten Würfeln, deren Seiten jeweils eine Länge von 1 cm haben.



Wie groß ist die Oberfläche dieses Objektes?

50

Ausarbeitung Aufgabe 1

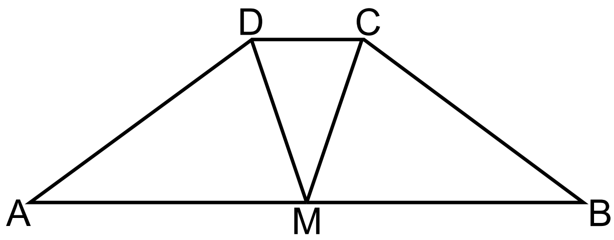
Das Objekt besteht aus 12 Würfeln. Wären die Würfel nicht verklebt, hätten sie zusammen einen Oberflächeninhalt von $6 \cdot 12 = 72$. 11 Flächen sind verklebt. Die Oberfläche des Objektes ist somit $72 - 11 \cdot 2 = 50$.

50

Aufgabe **2** (20 Punkte, 3×)

In einem Viereck $ABCD$ ist M die Mitte der Seite AB. Gegeben sind

$$|AM| = |BM| = |BC| = |AD| = 8 \quad \text{und} \quad |DM| = |CM| = 5.$$



Berechnet $|CD|$.

25/8

Ausarbeitung Aufgabe **2**

Da die Dreiecke $\triangle AMD$ und $\triangle MCB$ kongruent und gleichschenklig sind, gilt: $\angle CMB = \angle MDA$ und somit

$$\angle DMC = 180° - \angle AMD - \angle CMB = 180° - \angle AMD - \angle MDA = \angle DAM.$$

Da sowohl das Dreieck $\triangle AMD$ als auch das Dreieck $\triangle MCD$ gleichschenklig mit dem Winkel $\angle DAM$ an der Spitze sind, sind diese zwei Dreiecke ähnlich zueinander. Im Besonderen gilt:

$$|CD|/|DM| = |DM|/|AD| = 5/8.$$

Hieraus folgt, dass $|CD| = 5 \cdot 5/8 = 25/8$.

25/8

Aufgabe **3** (20 Punkte, 3x)

Die Schüler*innen einer Schule stehen in einem Kreis. Die Lehrperson möchte eine:n Schüler*in bestimmen, die oder der in die Cafeteria geht und dort für alle Kekse besorgt. Um diese Person auszuwählen, wird zunächst ein*e Schüler*in zufällig ausgewählt und aufgefordert, in diesem Kreis stehen zu bleiben. Die oder der im Uhrzeigersinn neben dieser Person stehende Schüler*in wird aufgefordert, den Kreis zu verlassen und sich zu setzen. Anschließend soll die oder der Nächste erneut im Kreis stehen bleiben, während der Übernächste den Kreis verlassen darf. Auf diese Weise fährt die Lehrperson fort bis nur noch ein*e Schüler*in steht.

*Welchen Platz hat die*der letzte im Kreis verbleibende Schüler*in ursprünglich eingenommen, wenn die*der zuerst ausgewählte Schüler*in vereinbarungsgemäß die Position 1 hatte und zu Beginn 1000 Schüler*innen im Kreis standen?*

977

Ausarbeitung Aufgabe **3**

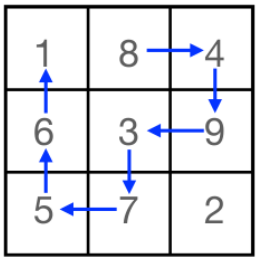
Zunächst betrachten wir einen einfacheren Fall, nämlich, dass die Anzahl an Schüler*innen eine Potenz von 2 ist, etwa 2^k. In der ersten Runde müssen alle Schüler*innen auf den geraden Positionen den Kreis verlassen. Dann kommen wir wieder bei Nummer 1 aus und es bleiben 2^{k-1} Personen übrig. Induktiv sieht man, dass in diesem Fall die Person an der Position 1 übrig bleibt. Für eine willkürliche Anfangszahl bedeutet das: Sobald die Anzahl an verbleibenden Personen eine Zweierpotenz ist, bleibt diejenige Person, die dann an der Reihe ist, am Schluss übrig. Die größte Potenz von 2, die kleiner als 1000 ist, ist 512. Damit dieser Zustand erreicht wird, müssen zuvor 1000 - 512 = 488 Schüler*innen den Kreis verlassen haben, also alle bis zur Position $2 \cdot 488 = 976$. Daher bleibt der*die Schüler*in mit der Nummer 977 als letztes übrig.

977

Aufgabe **4** (20 Punkte, 2x)

Ein Quadrat ist, wie unten links abgebildet, in neun kleinere Quadrate unterteilt. In dieses Quadrat soll nun ein Weg eingezeichnet werden, der jedes Quadrat nur einmal besucht und nur aus senkrechten und waagerechten Verbindungsstrecken besteht. Die Reihenfolge der auf diesem Weg liegenden Quadrate bildet eine Zahl. Der unten rechts abgebildete Weg repräsentiert beispielsweise die Zahl 84937561.

1	8	4
6	3	9
5	7	2



Was ist die größte Zahl, die man durch einen Weg, der die oben stehenden Bedingungen erfüllt, erreichen kann?

573618492

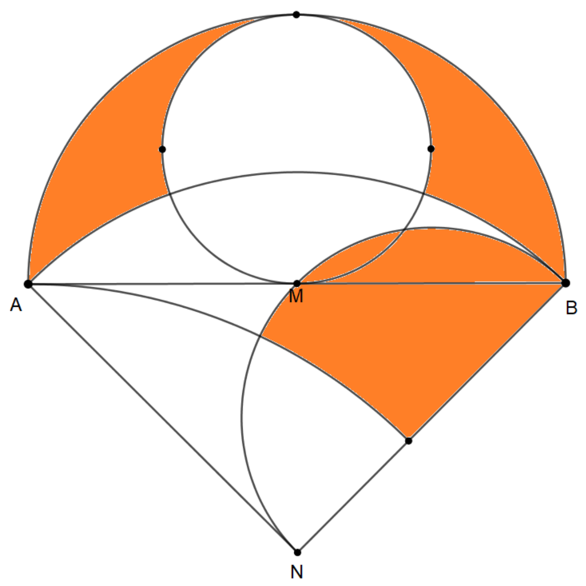
Ausarbeitung Aufgabe **4**

Wir färben zunächst gedanklich das Quadrat mit einem schwarz-weißen Schachbrettmuster. Sind die Ecken weiß, so gibt es fünf weiße und vier schwarze Felder. Da der Weg abwechselnd weiße und schwarze Felder besucht, muss man auf einem weißen Feld beginnen, um überhaupt eine neunstellige Zahl erhalten zu können. Die größtmögliche Anfangszahl ist 5. Danach ist die größte Zahl, die man von dort direkt erreichen kann, die 7, und danach die 3. So fährt man fort und erhält 573618492 als größtmögliche Zahl.

573618492

Aufgabe **5** (30 Punkte, 3×)

Für zwei Punkte A und B mit $|AB| = 1$ betrachten wir einen Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{AB}$, dessen Mittelpunkt M ist. Sei N der Punkt außerhalb des Halbkreises, der mit A und B ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck formt. Der rechte Winkel dieses Dreickes soll bei N liegen. Des Weiteren betrachten wir den Kreisbogen durch A und B mit Mittelpunkt N sowie den Halbkreis über $\overline{NB}$ innerhalb des Viertelkreises ANB. Schließlich sei noch innerhalb dieses Viertelkreises der Kreisbogen durch A gegeben, dessen Radius so groß wie $\overline{AB}$ ist.

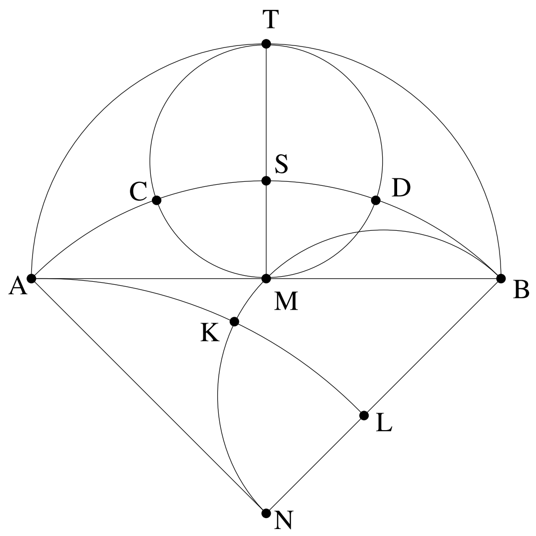


Berechnet den Inhalt der eingefärbten Fläche.

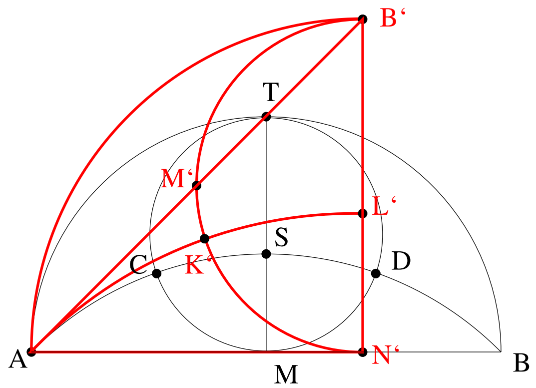
1/4

Ausarbeitung Aufgabe **5**

Der Einfachheit halber benennen wir noch einige Punkte:

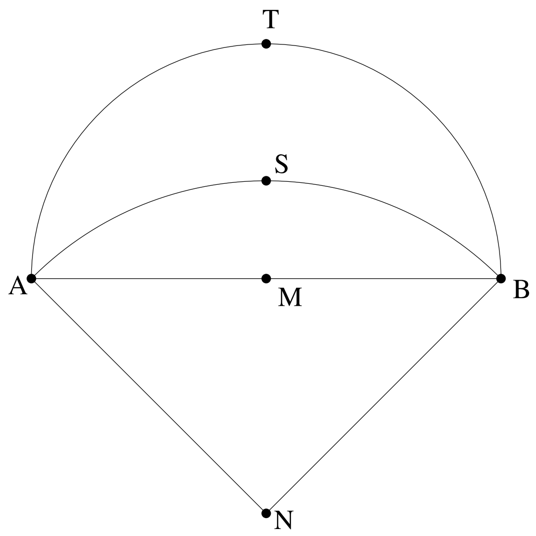


Zunächst führen wir das Argument an, dass die Fläche des orangen Stückes mit den Eckpunkten K, L, B genauso groß wie die Fläche des Stückes mit den Eckpunkten C, D, T ist. Wir nehmen dazu das Kuchenstück mit den Eckpunkten A, N, B, drehen es mit dem Winkel $45°$ nach oben um A (dies verändert die Fläche nicht) und erhalten ein neues Kuchenstück mit den Eckpunkten A, N', B':



Nach Pythagoras gilt: $|AN| = |BN| = 1/\sqrt{2}$ und daher $|AN'| = 1/\sqrt{2}$. Von A aus gesehen, ist das Stück mit den Eckpunkten A, N', B' die Vergrößerung des Stückes mit den Eckpunkten A, M, T, mit einem Vergrößerungsfaktor von $\sqrt{2}$. Daraus folgt, dass die Fläche des Stückes mit den Eckpunkten K', L', B' genau zweimal die Fläche des Stückes mit den Eckpunkten C, S, T ist. Das ist auch gleich der Fläche des Gebiets mit den Eckpunkten C, D, T, wie gefordert.

Mit dieser Erkenntnis sehen wir, dass die gesuchte Fläche des orangen Gebiets genauso groß ist wie die Fläche des Möndchens, das durch die Punkte A, S, B, T bestimmt wird. Um die Fläche zu bestimmen, betrachten wir folgende Figur:



Der Viertelkreis mit den Punkten A, N, B, S hat den Radius $1/\sqrt{2}$ und daher die Fläche $\pi(1/\sqrt{2})^2/4 = \pi/8$. Außerdem hat das Dreieck $\triangle ANB$ die Fläche $|AN| \cdot |BN|/2 = 1/4$. Daraus folgt, dass das Gebiet mit den Punkten A, M, B, S die Fläche $\pi/8 - 1/4$ hat. Der Halbkreis mit den Punkten A, M, B, T hat den Radius $1/2$, also die Fläche $\pi(1/2)^2/2 = \pi/8$. Die gesuchte Fläche des Möndchens A, S, B, T können wir nun als die Differenz der Fläche des Halbkreises und der Fläche des Teils mit den Punkten A, M, B, S berechnen:

$$\text{Fläche(oranger Teil)} = \text{Fläche(Möndchen } A, S, B, T) = \pi/8 - (\pi/8 - 1/4) = 1/4.$$

1/4

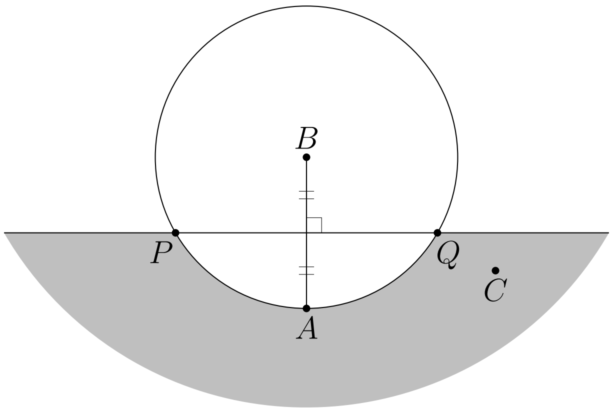
Aufgabe **6** (20 Punkte, 2×)

Flugtopia ist ein Land mit vielen Flughäfen, die sich alle in unterschiedlichen Entfernungen zueinander befinden. An einem Tag startet ein Flugzeug von jedem Flughafen und landet auf dem jeweils nächstgelegenen Flughafen.

Wie viele Flugzeuge können dabei maximal auf einem Flughafen landen?

5

Ausarbeitung Aufgabe **6**



Wir wählen einen Flughafen und nennen diesen A. Nun werden wir versuchen, so viele Flugzeuge wie möglich auf A landen zu lassen. Den A am nächsten liegenden Flughafen nennen wir B. Damit das Flugzeug von B auf A landet, darf in dem Kreis um B mit einem Radius der Länge der Strecke von B zu A kein Flughafen liegen.

Wir betrachten nun einen weiteren Flughafen C, dessen Flugzeuge auf A landen sollen. Dieser Flughafen C muss näher an A als an B liegen. In anderen Worten: Wenn wir eine Mittelsenkrechte zwischen A und B ziehen, muss C auf der Seite von A liegen, darf aber - wie gesehen - auch nicht im skizzierten Kreis liegen. Die Mittelsenkrechte schneidet den Kreis in zwei Punkten, sagen wir P und Q. Das Dreieck $\triangle BAQ$ ist ein gleichseitiges Dreieck, daher ist $\angle BAQ = 60°$. Unser Flughafen C darf jedoch nicht auf dem Punkt Q selbst liegen, da alle Flughäfen verschiedene Abstände zueinander haben. Das bedeutet, dass $\angle BAC > 60°$ sein muss. Um A herum lassen sich aber höchstens 5 Flugzeuge C_i mit $\angle C_iAC_j > 60°$ $(i \neq j)$ platzieren. So sehen wir ein, dass maximal 5 Flugzeuge auf A landen können.

5

Aufgabe 7 (20 Punkte, 3×)

Drei Uhren haben gleichzeitig begonnen zu ticken. Die erste Uhr tickt alle 2 Sekunden, die zweite alle 3 Sekunden und die dritte alle 5 Sekunden. Mehrere gleichzeitig auftretende Ticktöne werden als ein Ticken gehört.

Wie viel Zeit vergeht zwischen dem ersten und dem 1000-ten Ticken?

1362

Ausarbeitung Aufgabe 7

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2,3 und 5 ist 30. Alle 30 Sekunden sind 15 + (10 - 5) + (6 - 3 - 1) = 22 Ticktöne zu hören. Nun teilen wir die $999 = 1000 - 1$ Ticktöne in Blöcke mit 22 Ticktönen und einen Rest:

$$999 = 45 \cdot 22 + 9.$$

Für die letzten 9 Ticktöne werden noch 12 Sekunden benötigt. Die gesuchte Zeit ist damit:

$$45 \cdot 30 + 12 = 1362 \text{ Sekunden.}$$

1362

Aufgabe 8 (30 Punkte, 3×)

Vier Personen müssen nachts eine Hängebrücke überqueren, die das Gewicht von zwei Personen tragen kann. Die Gruppe besitzt nur eine einzige Taschenlampe, die unbedingt erforderlich ist, um die Überquerung zu wagen. Wenn also eine Person die Brücke überquert, muss sie dabei die Taschenlampe bei sich haben. Überqueren zwei Personen zeitgleich die Brücke, müssen sie zusammenbleiben und einer von ihnen die Taschenlampe bei sich haben. Eine oder mehrere Personen müssen daher die Brücke mehrmals überqueren, um das Licht zurück zu bringen.

Die Personen brauchen unterschiedliche Zeiten, um die Brücke zu überqueren: Person A schafft es in einer Minute, Person B in zwei Minuten, Person C in fünf Minuten und Person D benötigt zehn Minuten.

Wie viele Minuten werden mindestens benötigt, um alle Personen von einer Seite der Brücke auf die andere zu bringen?

17

Ausarbeitung Aufgabe 8

Die Idee ist, die zwei schnellsten Personen die Brücke zusammen überqueren zu lassen. A und B gehen zusammen rüber und A bringt die Taschenlampe zurück. Dann gehen C und D zusammen rüber und B bringt die Taschenlampe zurück. Schließlich gehen A und B zusammen rüber. Die gesamte Zeit beträgt $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ Minuten.

Eine Alternative ist, dass im zweiten Schritt B mit der Taschenlampe zurückläuft. Dann muss im vierten Schritt A die Lampe zum Anfangspunkt zurückbringen. Auch dies dauert $2 + 2 + 10 + 1 + 2 = 17$ Minuten.

Nun wollen wir einsehen, dass es nicht schneller gehen kann. Um vier Personen auf die andere Seite zu bekommen, müssen erst zwei zur anderen Seite, dann einer mit der Taschenlampe zurück, dann wieder zwei rüber, nochmal einer mit der Taschenlampe zurück und dann müssen die letzten zwei zur anderen Seite. Das sind fünf Überquerungen.

Gesetzt den Fall, dass C und D nicht gleichzeitig und nicht mehrmals über die Brücke gehen, kostet das bereits $10 + 5 = 15$ Minuten und das Überqueren jedes anderen dauert mindestens eine Minute, also dauert es insgesamt sicher $15 + 1 + 1 + 1 = 18$ Minuten.

Um es in höchstens 17 Minuten für jeden hinzubekommen, ist es daher notwendig, dass C und D zusammen über die Brücke gehen und dass sie ansonsten nicht eingesetzt werden. Hierbei können C und D nicht als erstes über die Brücke gehen, da dann einer von ihnen die Taschenlampe zurückbringen müsste. Außerdem können C und D nicht als letztes hinübergehen, da dann einer von ihnen im Schritt davor die Taschenlampe zurückbringen müsste. Daher ist es am schnellsten, wenn C und D die Hängebrücke im mittleren der fünf Schritte überqueren. Dies führt zu den beiden genannten Lösungen.

17

Aufgabe **9** (20 Punkte, 3×)

Wir bilden eine lange Zahlenfolge, indem wir die Quadrate der Zahlen 1 bis 44 nacheinander in einer Reihe schreiben.

$$1\,4\,9\,16\,25\,36\,49\,64\,81\,100\,121\,\cdots\,1936$$

Aus wie vielen Ziffern besteht diese Folge?

133

Ausarbeitung Aufgabe **9**

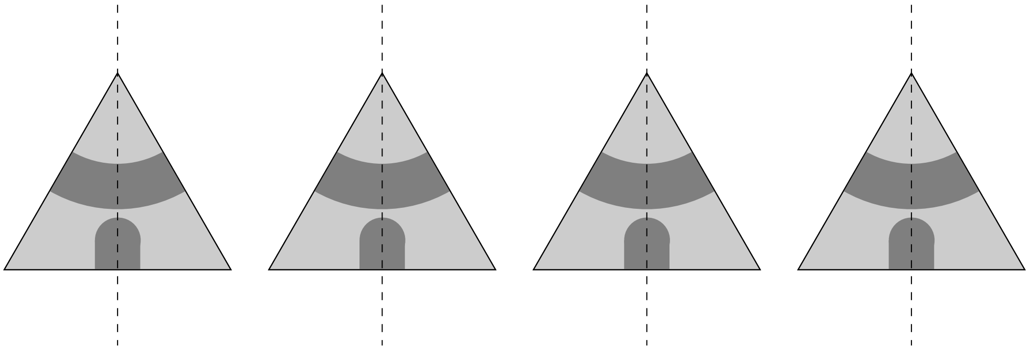
Es gibt offenbar 3 Quadratzahlen mit einer Ziffer und 6 Quadratzahlen mit zwei Ziffern. Die größte Quadratzahl mit drei Ziffern ist $31^2 = 961$, also gibt es $31 - 9 = 22$ Quadratzahlen mit drei Ziffern. Die Quadratzahlen von 32 bis zu 44 haben alle vier Ziffern. Von diesen Quadratzahlen gibt es $44 - 31 = 13$. Die Gesamtanzahl an Ziffern in der Folge wird damit:

$$3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 22 \cdot 3 + 13 \cdot 4 = 3 + 12 + 66 + 52 = 133.$$

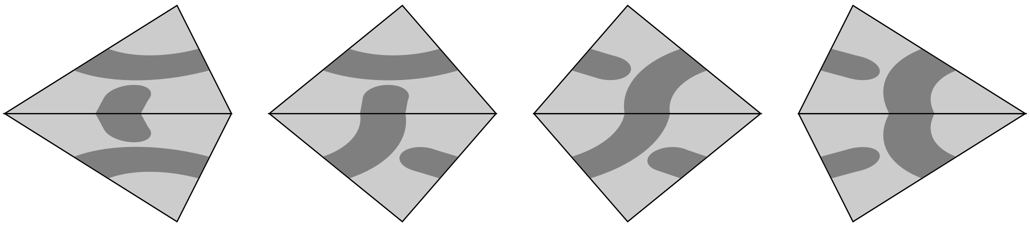
133

Aufgabe **10** (30 Punkte, 3x)

Vier kongruente regelmäßige Dreiecke haben den gleichen Aufdruck. Der Aufdruck besitzt eine Symmetrieachse, die durch eine gepunktete Linie gekennzeichnet ist.



Wenn wir die Kanten der vier Dreiecke so zusammenkleben, dass der Aufdruck nach außen gerichtet ist, erhalten wir ein Tetraeder. Nachstehend sind vier mögliche Tetraeder aufgeführt.



Von jedem Tetraeder sind nur zwei der vier Dreiecke sichtbar. Daher können zwei von ihnen gleich sein, auch wenn sie in der Abbildung unterschiedlich aussehen. Zwei Tetraeder sind gleich, wenn das eine durch Drehungen in das andere umgewandelt werden kann.

Wie viele verschiedene Tetraeder können wir auf diese Weise bilden?

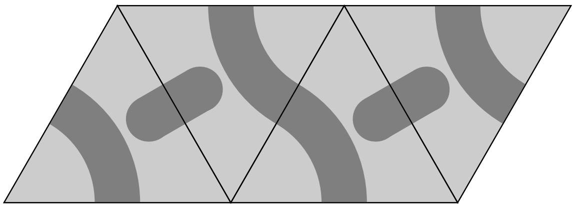
9

Ausarbeitung Aufgabe **10**

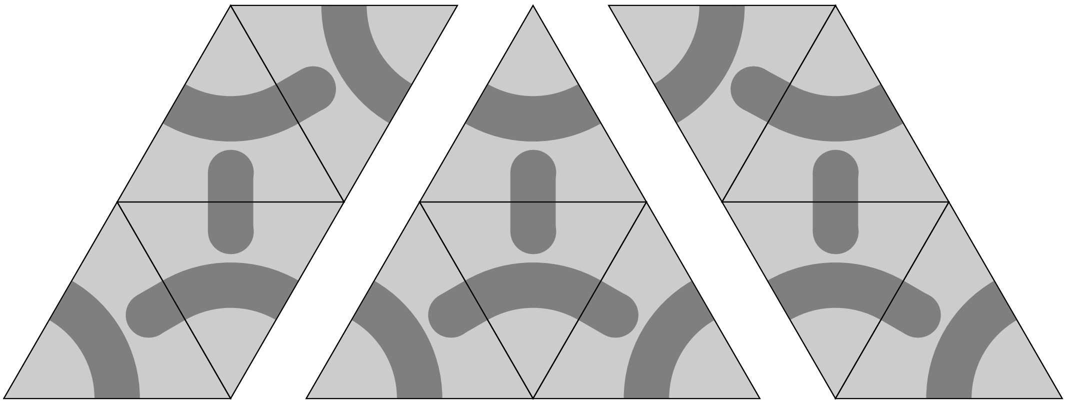
Jedes Dreieck hat zwei Seiten, die durch einen Kreisabschnitt verbunden werden, und einen 'Stummel'. Wir wollen Wege durch den Tetraeder entlang dieser Stummel betrachten.

Wir nehmen nun an, dass wir die Dreiecke zu einem Tetraeder aneinandergeklebt haben. Dann können wir wie folgt durch den Tetraeder über die Dreiecke laufen: Wir starten bei einem willkürlichen Dreieck. Dann verlassen wir das Dreieck über die Seite mit dem Stummel und kommen zum nächsten Dreieck, welches wir ebenfalls über die Seite mit dem Stummel verlassen. Diesen Prozess fahren wir fort, bis wir in einen Zykel (Schleife) geraten. Ein solcher Zykel kann aus 2, 3 oder 4 Dreiecken bestehen. Weiterhin kann man die Tetraeder danach unterscheiden, nach wie vielen Schritten man spätestens in einen solchen Zykel hineingerät.

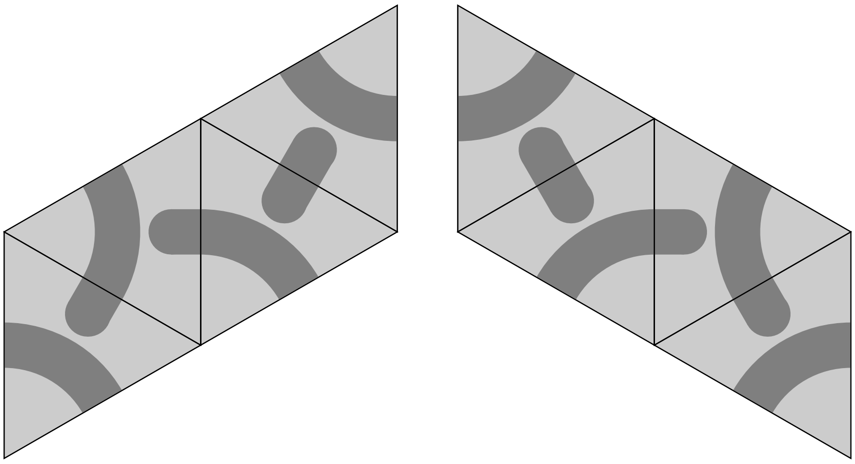
- *Es gibt* 2 *Zykel, die aus* 2 *Dreiecken bestehen.*
  Dies ist nur auf 1 Art und Weise möglich.



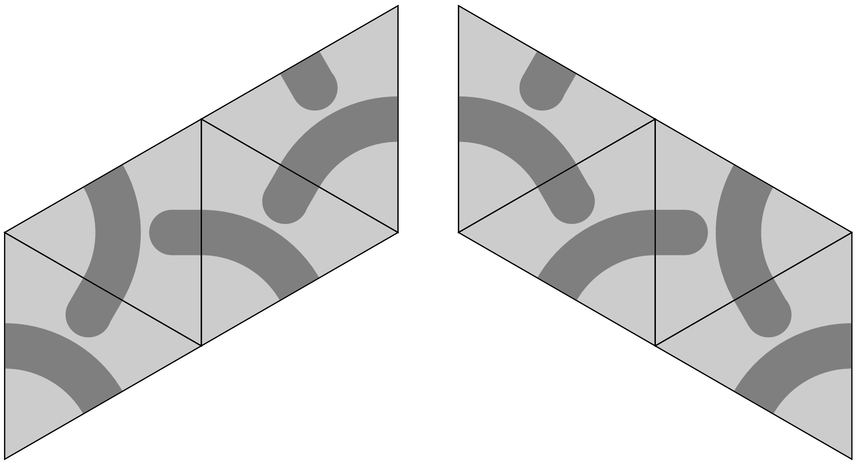
- *Es gibt* 1 *Zykel, der aus* 2 *Dreiecken besteht und der in maximal* 1 *Schritt erreicht wird.*
  Dies ist auf 3 Arten und Weisen möglich.



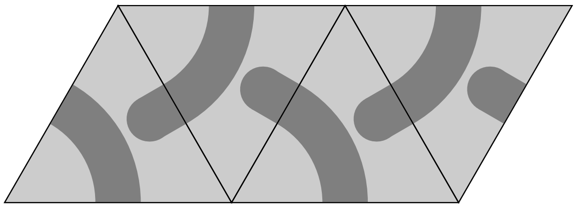
- *Es gibt* 1 *Zykel, der aus* 2 *Dreiecken besteht und der in maximal* 2 *Schritten erreicht wird.*
  Dies ist auf 2 Arten und Weisen möglich.



- *Es gibt* 1 *Zykel, der aus* 3 *Dreiecken besteht.*
  Dies ist auch auf 2 Arten und Weisen möglich.



- *Es gibt* 1 *Zykel, der aus* 4 *Dreiecken besteht.*
  Dies ist nur auf 1 Art und Weise möglich.



Insgesamt gibt also 9 verschiedene Tetraeder im folgenden Sinne: Es gibt 9 rotationsinvariante Möglichkeiten, die vier Flächen des Tetraeders mit dem gegebenen Dreiecksmuster zu belegen.

9

Aufgabe **11** (30 Punkte, 3x)

Ein Kellner eines italienischen Restaurants hat einen Weg gefunden, Wein aus dem Weinkeller zu stehlen. Dazu trinkt er aus einem vollen Fass drei Gläser und füllt das Fass anschließend mit drei Gläsern Wasser wieder auf. Dieses Vorgehen wiederholt er an den folgenden beiden Tagen mit dem selben Fass, welches mittlerweile verdünnten Wein enthält. Nach den drei Tagen ist das Fass nur noch zu $72,9\%$ mit Wein und zu $27,1\%$ mit Wasser gefüllt.

Wie viele Gläser fasst das Weinfass?

30

Ausarbeitung Aufgabe **11**

Das Fass enthalte x Gläser. Ersetzt man drei Gläser der Mischung im Fass durch drei Gläser Wasser, so wird die Konzentration an Wein im Fass mit einem Faktor $\frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$ multipliziert. Die Lösung ist daher die reelle Wurzel der Gleichung

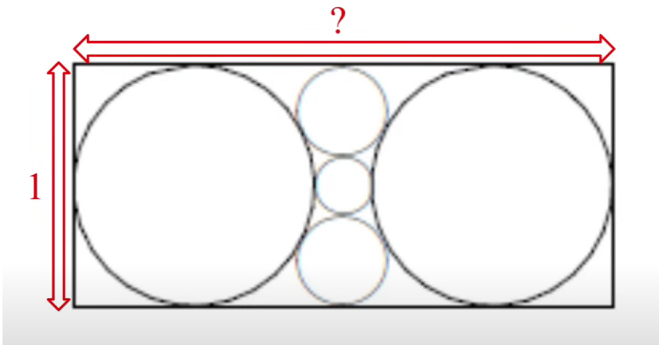
$$\left(1 - \frac{3}{x}\right)^3 = \frac{729}{1000} = \left(\frac{9}{10}\right)^3.$$

Das ergibt $1 - 3/x = 9/10$, also $3/x = 1/10$ und $x = 30$.

30

Aufgabe 12 (20 Punkte, 3x)

Fünf Kreise berühren sich untereinander und zugleich die Seiten eines Rechtecks, wie in der folgenden Abbildung dargestellt.



Wie groß ist das Verhältnis zwischen der langen Seite zur kurzen Seite des Rechtecks?

$\sqrt{5}$

Ausarbeitung Aufgabe 12

Wir suchen die Breite x des Rechtecks. Der Kreis ganz links und der Kreis ganz rechts haben beide den Radius 1/2. Aus Symmetriegründen haben der oberste und der unterste Kreis in der Mitte den gleichen Radius, sagen wir R. Den Radius des Kreises im Zentrum bezeichnen wir mit r.

Wir betrachten nun das Dreieck, das durch die Mittelpunkte des linken, des zentralen und des obersten der in der Mitte befindlichen Kreise gebildet wird. Nach dem Satz von Pythagoras gilt:

$$(1/2 + r)^2 + (r + R)^2 = (1/2 + R)^2.$$

Nun wollen wir R durch r ersetzen. Offenbar gilt aber:

$$4R + 2r = 1,$$

also $R = -1/2r + 1/4$ und damit

$$(1/2 + r)^2 + (1/2r + 1/4)^2 = (-1/2r + 3/4)^2.$$

Dies multiplizieren wir aus und erhalten:

$$1/4 + r + r^2 + 1/4r^2 + 1/4r + 1/16 = 1/4r^2 - 3/4r + 9/16,$$

also:

$$r^2 + 2r - 1/4 = 0.$$

Als positive Lösung dieser quadratischen Gleichung erhält man

$$r = -1 + \sqrt{5}/2.$$

Nun müssen wir aus r noch x berechnen. Es gilt aber:

$$x = 2 + 2r$$

und damit

$$x = \sqrt{5}.$$

$\sqrt{5}$

Aufgabe **13** (30 Punkte, 3x)

Sei $n > 0$ eine ungerade ganze Zahl. Des Weiteren sei V eine Teilmenge der Menge $\{-n, 1-n, 2-n, \ ... \ , n-2, n-1, n\}$, sodass für alle $a,\ b,\ c$ aus V gilt: $a+b+c \neq 0$. (Dabei können mehrere Variablen den gleichen Wert annehmen.)

Bestimmt, wie viele Elemente die Menge V in Abhängigkeit von n maximal besitzen kann.

$n+1$

Ausarbeitung Aufgabe **13**

Wir betrachten alle ungeraden Zahlen in $\{-n, \dots, n\}$. Die Summe dreier ungerader Zahlen ist wieder eine ungerade Zahl und sicher nicht 0. Daher erfüllt diese Menge die Bedingungen. In der Menge sind $n+1$ Elemente enthalten. Zu beweisen, dass dies die maximale Anzahl ist, ist etwas schwieriger. Wir nehmen an, es gäbe eine Menge V, die die Bedingungen erfüllt und die außerdem mehr als $n+1$ Elemente beinhaltet, und wollen diese Annahme zum Widerspruch führen. Da $0+0+0=0$, liegt 0 sicher nicht in V. Wir zeigen nun zunächst, dass dann auch 1 und -1 nicht in V liegen können. Die Anzahl an ungeordneten Paaren $\{v, w\}$ in $\{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}$ mit $v+w=-1$ ist $n-1$, nämlich

$$\{-n, n-1\}, \{-n+1, n-2\}, \dots, \{-2, 1\}.$$

Hier sind alle ganzen Zahlen aus $\{-n, \dots, n\}$ enthalten bis auf 0, -1 und n. Nach Annahme liegen aber in $V \setminus \{-1, 0, n\} = V \setminus \{-1, n\}$ mehr als $n+1-2 = n-1$ Elemente. Damit muss aber (Schubfachprinzip) eines der ungeordneten $n-1$ Paare

$$\{-n, n-1\}, \{-n+1, n-2\}, \dots, \{-2, 1\}$$

in V liegen. Nach Definition von V kann dann aber 1 nicht in V liegen. Wendet man das gleiche Argument auf die Menge aller Paare $\{v, w\}$ in $\{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}$ mit $v+w=1$ an, so sieht man, dass auch -1 nicht in V liegen kann.

Wir nehmen nun an, dass wir für eine gegebene natürliche Zahl k bewiesen haben, dass V keine Elemente aus $\{-k+1, -k+2, \dots, k-2, k-1\}$ enthält. Ist

$$M := \{-n, \dots, n\} \setminus \{-k+1, -k+2, \dots, k-2, k-1\},$$

so liegen höchstens die folgenden ungeordneten Paare $\{v, w\}$ mit $v+w=-k$ in M:

$$\{-n, n-k\}, \{-n+1, n-k-1\}, \dots, \{-2k, k\}.$$

Dies sind $n-2k+1$ Paare. Paare aus dieser Aufzählung, die nicht in M liegen, betrachten wir ab jetzt nicht mehr. Nach Annahme liegen in V mehr als

$$n+1-2\cdot(-k-(-2k+1)+1) = n-2k+1$$

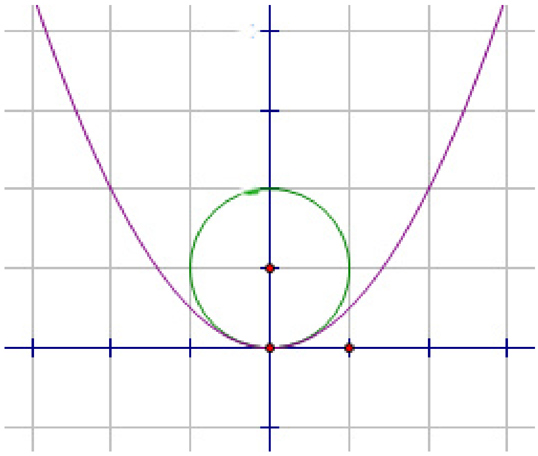
Elemente, die alle in in einem der genannten höchstens $n-2k+1$ ungeordneten Paare enthalten sein müssen. Daher muss (Schubfachprinzip) eines dieser ungeordneten Paare $\{v, w\}$ ganz in V liegen. Nach Definition von V kann dann aber k nicht in V liegen. Wendet man das gleiche Argument auf die Menge aller Paare $\{v, w\}$ in $\{-n, \dots, n\} \setminus$

$\{-k+1, -k+1, \ldots, k-2, k-1\}$ mit $v+w=k$ an, so sieht man, dass auch $-k$ nicht in V liegen kann. Daher enthält V keine Elemente aus $\{-k, -k+1, \ldots, k-1, k\}$. Induktiv folgern wir, dass V leer ist, was natürlich absurd ist.

$n+1$

Aufgabe **14** (20 Punkte, 2x)

Gegeben sei eine Parabel als Graph der Funktion $y = x^2$.



Wie groß ist der maximale Radius eines Kreises, der die Parabel im Scheitelpunkt berührt und sich ansonsten ganz oberhalb der Parabel befindet?

1/2

Ausarbeitung Aufgabe **14**

Wenn der Radius des Kreises r ist, dann folgt aus der Berührung der Parabel im Scheitelpunkt, dass der Mittelpunkt des Kreises $(0, r)$ ist. Punkte (x, y) auf dem Kreis erfüllen die Gleichung $(r - y)^2 + x^2 = r^2$, also

$$x^2 = r^2 - (r - y)^2 = r^2 - (r^2 - 2ry + y^2) = (2r - y)y$$

und $|x| = \sqrt{(2r - y)y}$.

Da der Kreis vollständig über dem Graphen von $y = x^2$ liegt, muss für ein gegebenes y (zwischen 0 und $2r$) die positive x-Koordinate auf dem Kreis kleiner (oder gleich) der positiven x-Koordinate auf der Parabel sein. Beziehungsweise

$$\sqrt{(2r - y)y} \leq \sqrt{y}.$$

Quadrieren und Teilen durch y ergibt $2r - y \leq 1$, also $y \geq 2r - 1$. Dies muss für jedes y zwischen 0 und $2r$ gelten, also $2r - 1 \leq 0$. Der größte Radius, für den dies gilt, ist $r = 1/2$.

1/2

Aufgabe 15 (30 Punkte, 3x)

Auf einer Feier sind insgesamt 2022 Person. Für jede Gruppe von vier Personen, die an der Feier teilnehmen, gibt es mindestens eine Person, die die anderen drei dieser Gruppe kennt. Wir gehen davon aus, dass eine Person A Person B genau dann kennt, wenn B auch A kennt.

Wie viele Personen gibt es mindestens auf der Feier, die alle anwesenden Gäste kennen?

2019

Ausarbeitung Aufgabe 15

Wir werden zeigen, dass auf einem solchen Fest mit $n \geq 4$ Gästen, immer $n-3$ alle anderen kennen. Mehr kann man auch nicht zeigen, denn betrachte den Fall dreier Personen A, B, C, die einander nicht kennen, und $n-3$ Personen, die sowohl einander als auch A, B, C kennen. Dann ist die Bedingung erfüllt und es kennen 3 Personen nicht alle anwesenden Gäste.

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 4$. Die Annahme sagt gerade, dass es mindestens eine Person gibt, die alle drei anderen kennt, und es gilt $1 = n - 3$.

Nun nehmen wir an, dass wir die Aussage schon für alle Feste mit höchstens k Gästen bewiesen haben. Betrachte ein Fest mit $k + 1$ Gästen, das die Bedingung erfüllt. Wir wählen nun einen Gast aus und nennen ihn A. Indem wir A zunächst weglassen, erhalten wir eine Gruppe G mit k Gästen.

Fall 1: Alle Personen in G kennen einander
Es seien B, C, D Personen von G. Wir betrachten die vier Personen A, B, C, D. Nach Annahme kennt A davon mindestens eine Person, sagen wir D. Dann kennt D alle Personen auf dem Fest.

Fall 2: Nicht alle Personen in G kennen einander
Wir nehmen an, dass sich B und C nicht kennen. Nach unserer Annahme gibt es mindestens $k - 3 \geq 1$ Personen aus G, die alle Personen von G kennen. Es sei D eine dieser Personen. Wir betrachten die vier Personen A, B, C, D. Da B und C einander nicht kennen, muss A oder D die anderen drei kennen. Insbesondere kennt D alle Personen auf dem Fest.

In beiden Fällen gibt es eine Person D, die alle Personen auf dem Fest kennt. Wir betrachten nun die Gruppe G' mit k Personen, die aus allen Gästen außer D besteht. Nach unserer Annahme gibt es mindestens $k - 3$ Personen in G', die jeden in G' kennen. Die $k - 3$ Personen kennen aber auch D. Zusammen mit D ergibt dies somit $k - 2$ Personen, die jeden Gast auf dem Fest kennen.

2019

Aufgabe 16 (20 Punkte, 2x)

Ein Kaninchen springt entlang einer Linie auf dem Boden. Das Zuhause des Kaninchens ist ein Loch auf der Linie. Das Kaninchen folgt zwei Regeln:

- Wenn sich das Kaninchen in einer Entfernung $d \leq 1$ vom Bau befindet, springt es vom Bau weg zu einem Punkt in der Entfernung d von seiner vorherigen Position.
- Befindet sich das Kaninchen in einem Abstand $d > 1$ vom Bau, springt es über den Bau zu einem Punkt, der sich in einem Abstand $\frac{1}{d}$ zum Bau befindet.

Wie viele Folgen von drei Sprüngen, bei denen das Kaninchen schließlich in einer Entfernung von $0,8$ zum Bau landet, sind möglich?

8

Ausarbeitung Aufgabe 16

Wir geben die Punkte auf der Linie mit reellen Zahlen an, so dass das Loch in 0 liegt. Sei x_n der Platz des Kaninchens nach n Sprüngen. In einer Formel ausgedrückt, springt das Kaninchen wie folgt:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{als } |x_n| \leq 1, \\ -1/x_n & \text{als } |x_n| > 1. \end{cases}$$

Im Besonderen gilt $|x_{n+1}| \leq 2$. Um auf einem x_{n+1} mit $1 \leq |x_{n+1}| \leq 2$ auszukommen, gibt es nur ein mögliches positives x_n, nämlich $x_{n+1}/2$. Für $0 < |x_{n+1}| < 1$ gibt es zwei Positionen, von wo aus nach x_{n+1} gesprungen wird, nämlich $x_n = x_{n+1}/2$ und $x_n = -1/x_{n+1}$.

Gegeben ist $|x_3| = 0.8$. Wir betrachten nur $x_3 = 0.8$, die Folgen für $x_3 = -0.8$ können daraus erhalten werden, indem alles mit -1 vervielfacht wird. Es gibt folgende Möglichkeiten:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 \\
-8/5 & \searrow & & & & & \\
-5/16 & \rightarrow & -5/8 & \rightarrow & -5/4 & \searrow & \\
1/10 & \rightarrow & 1/5 & \rightarrow & 2/5 & \rightarrow & 4/5 \\
-5 & \nearrow & & & & & \\
?? & \rightarrow & -5/2 & \nearrow & & &
\end{array}$$

Hierbei kann $x_1 = -5/2$ nicht erreicht werden, weil $|-5/2| > 2$. Daher bleiben 4 Folgen übrig und zusammen mit den Optionen für $x_3 = -0.8$ liefert dies 8 Folgen.

8

Aufgabe **17** (20 Punkte, 3x)

Angenommen, a, b, c, d sind vier ganze Zahlen mit $1 \leq a < b < c < d \leq 10$.

Was ist der minimale Wert von $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$*?*

11/15

Ausarbeitung Aufgabe **17**

Wenn $a \neq 1$, können wir den Wert verkleinern, indem wir $a = 1$ annehmen. Auf dieselbe Weise können wir $c = b + 1$ und $d = 10$ annehmen. Dann wird der Wert

$$\frac{1}{b} + \frac{b+1}{10} = \frac{10 + b(b+1)}{10b}.$$

Nun können wir alle Möglichkeiten für b von 2 bis 8 durchgehen b. Dies liefert die Werte

$$\frac{13}{10}, \frac{11}{15}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{13}{15}, \frac{33}{35}, \frac{41}{40}.$$

Der kleinste Wert hiervon ist 11/15. Dieser tritt auf, wenn $a = 1, b = 3, c = 4, d = 10$.

11/15

Aufgabe 18 (30 Punkte, 3x)

Für jede ganze Zahl $n > 1$ bilden wir eine Folge $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$. Die Anfangszahl der Folge ist $a_1 = n$. Wenn die Zahl a_j in der Folge ungerade ist, dann kann man die folgende Zahl wie folgt bilden:

$$a_{j+1} = \frac{a_j + 1}{2}.$$

Wir stoppen die Folge, sobald wir bei einer Zahl a_k ankommen, die gerade ist.

Beispiel:

- Wenn $n = 5$ ist, dann ist die Anfangszahl der Folge $a_1 = 5$.
- Die nächste Zahl ist entsprechend der Formel
$$a_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$
- Da a_2 ungerade ist, können wir wieder die Formel anwenden:
$$a_3 = \frac{3+1}{2} = 2.$$
- Da a_3 gerade ist, endet die Folge nun. Die entstandene Folge mit Anfangszahl $n = 5$ ist also 5, 3, 2.

Die Anzahl der Zahlen in der Folge hängt von der Anfangszahl ab. Starten wir beispielsweise mit $n = 7$, ist die Folge noch kürzer: $7, 4$.

Was ist die kleinste Anfangszahl n, für die die Folge aus 2022 Zahlen besteht?

$2^{2021} + 1$

Ausarbeitung Aufgabe 18

Wir schreiben die Anfangszahl als $n = a_1 = 1 + 2^m b$, wobei b ungerade ist und $m \geq 0$. Wenn $m = 0$ ist, dann is a_1 gerade und beendet die Folge sofort. Wenn $m > 0$ ist, dann

$$a_2 = (2 + 2^m b)/2 = 1 + 2^{m-1} b.$$

Auf dieselbe Weise folgt, dass $a_j = 1 + 2^{m+1-j} b$. Diese Folge endet bei $j = m + 1$. Wir wollen, dass es 2022 Terme gibt, also müssen wir dann $m = 2021$ und $n = 1 + 2^{2021} b$ nehmen. Das kleinste n, für das dies funktioniert, nämlich $n = 1 + 2^{2021}$, erhalten wir mit $b = 1$.

$2^{2021} + 1$

Aufgabe 19 (30 Punkte, 3x)

Wir betrachten einen Tetraeder $OABC$, bei welchem alle drei Winkel in O senkrecht zueinander stehen. Zudem soll gelten dass $|OA| + |OB| + |OC| = 1$.

Bestimmt das maximale Volumen des Tetraeders.

1/162

Ausarbeitung Aufgabe 19

Wir platzieren den Tetraeder so in einem Koordinatensystem, dass O der Ursprung ist und OA, OB, OC auf der positiven x-Achse, y-Achse und z-Achse liegen. Wir schreiben $a = |OA|, b = |OB|, c = |OC|$.

Der Teil des Tetraeders mit einer festen x-Koordinate ist ein Dreieck in der (y, z)-Ebene mit den Eckpunkten $(0, 0), (b(1 - x/a), 0), (0, c(1 - x/a))$. Das Dreieck hat die Fläche $b(1 - x/a)c(1 - x/a)/2$.

Der Flächeninhalt des Tetraeders kann berechnet werden, indem die Flächen dieser Dreiecke entlang OA integriert werden:

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{a} \frac{b(1 - x/a)c(1 - x/a)}{2} \mathrm{d}x &= \frac{bc}{2} \int_{x=0}^{a} (1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{bc}{2} \big[x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\big]_0^a = \frac{bc}{2}(a - a + a/3) = \frac{abc}{6}\end{aligned}$$

Da $c = 1 - a - b$ gilt, können wir das Volumen auch wie folgt ausdrücken:

$$I(a, b) = ab(1 - a - b)/6 = (ab - a^2b - ab^2)/6.$$

Dieses müssen wir unter der Bedingung, dass $0 \leq a, b \leq 1$ gilt, maximieren. Wenn a oder b gleich 0 oder 1 sind, wird der Flächeninhalt 0, also müssen wir auch die Bedingung $0 < a, b < 1$ aufstellen. Wenn wir a und b so gewählt haben, dass $I(a, b)$ maximal ist, sind die Ableitungen von $I(a, b)$ nach a und b beide 0. Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a}(a, b) = \frac{b - 2ab - b^2}{6} = \frac{b}{6}(1 - 2a - b),\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a}(a, b) = \frac{a - a^2 - 2ab}{6} = \frac{a}{6}(1 - a - 2b).\end{aligned}$$

Da $a, b > 0$ gilt, sind diese Bedingungen äquivalent zu

$$1 - 2a - b = 0 = 1 - a - 2b.$$

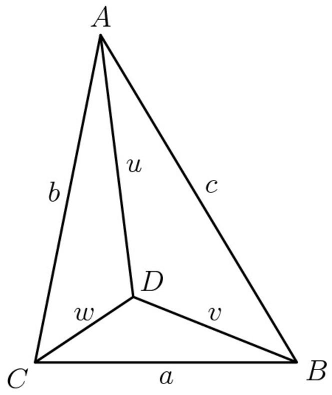
Hier ist die Differenz der linken und rechten Seite $a - b$, also muss $a = b$ gelten. Dann folgt $a = b = 1/3$ und auch $c = 1 - a - b = 1/3$.

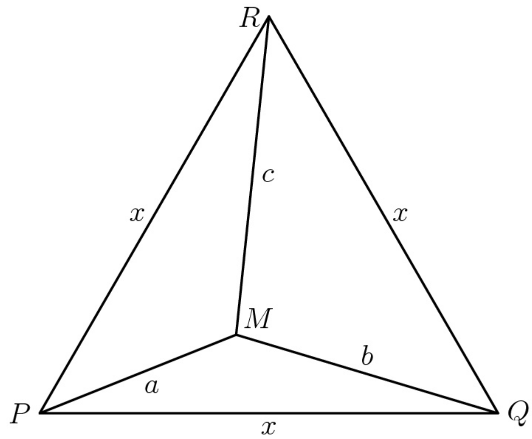
Das gesuchte maximale Volumen wird damit $abc/6 = 1/(3^3 \cdot 6) = 1/162$.

1/162

Aufgabe **20** (30 Punkte, 3x)

In der folgenden Abbildung haben alle drei in D anliegenden Winkel eine Größe von 120°.



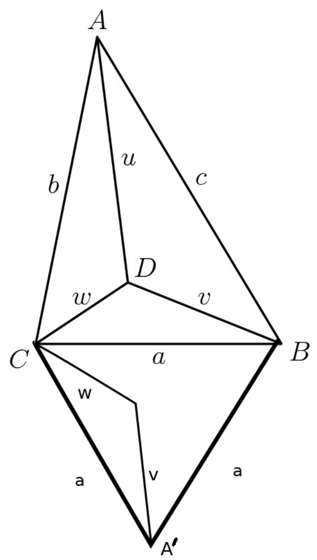


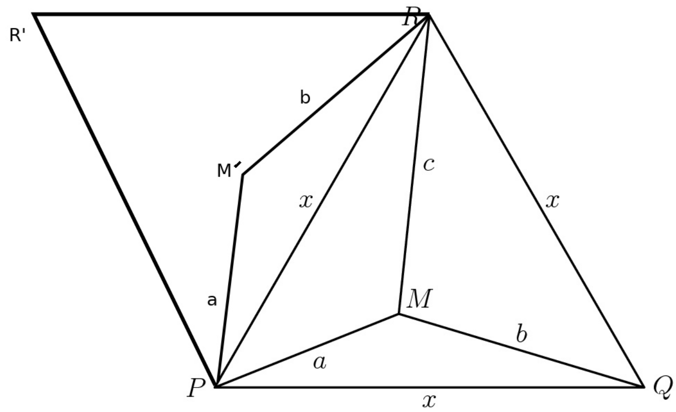
Bestimmt die Länge von x in Abhängigkeit der Streckenlängen u, v und w.

$u + v + w$

Ausarbeitung Aufgabe **20**

Füge an der Unterkante der links oben dargestellten Figur ein gleichseitiges Dreieck an. Drehe $\triangle CDB$ um 60° im Uhrzeigersinn um C und zeichne es hinzu. Dies ergibt die links unten abgebildete Figur. Drehe $\triangle PQR$ gegen den Uhrzeigersinn um 60° und zeichne es oben hinzu. Füge die gedrehte Version von $\triangle PMQ$ hinzu. Dies gibt die rechts unten abge-





bildete Figur.
Durch das Verfolgen der Kanten und Ecken sehen wir, dass der Punkt A' auf der Verlängerung der Strecke AD liegt. Daraus folgt, dass $ABA'C$ zu $RMPM'$ kongruent ist. Im Besonderen gilt $x = |AA'|$. An der linken Seite ist AA' aus Stücken der Länge u, w, v aufgebaut.

$u + v + w$