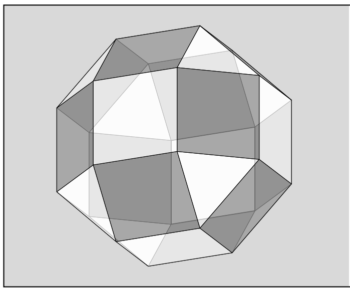


30. Mathematik-Turnier

# Staffel

2021

Radboud Universiteit

universitätbonn

KU LEUVEN

Ihr habt **60 Minuten** Zeit für **20 Aufgaben**.

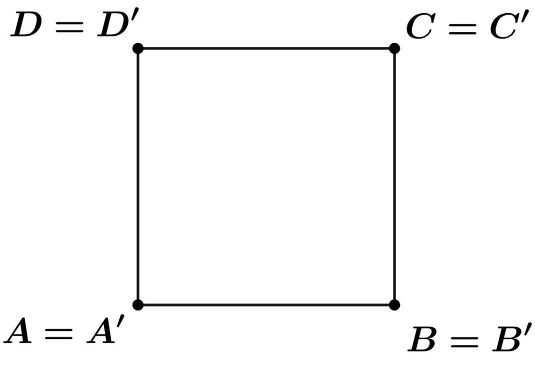
Für jede Aufgabe erhaltet ihr 2 oder 3 Versuche, die richtige Antwort zu geben, in der Regel 3 Versuche.

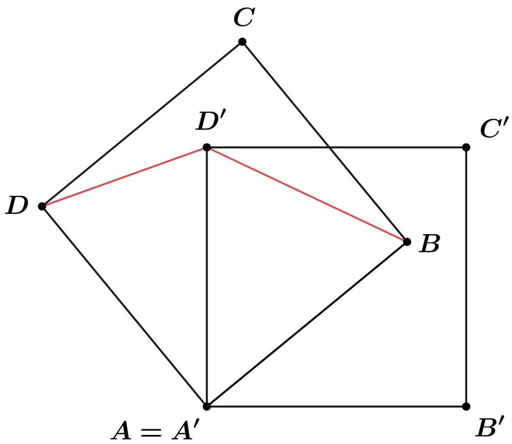
Jede Aufgabe ergibt **20** oder **30** Punkten. Die Gesamtzahl der zu erreichenden Punkte ist **500**.

## Aufgabe **1** (20 Punkte, Rest 480 Punkte)

(2 Versuche)

Zwei Quadrate liegen genau übereinander. Das obere Quadrat wird um $A$ gegen den Uhrzeigersinn so gedreht, dass bei $D'$ ein stumpfer Winkel entsteht:




Wie groß ist der Winkel $\angle DD'B$?

## Aufgabe 2 (30 Punkte, Rest 450 Punkte)

(2 Versuche)

Wir betrachten Zahlen der Form $q = p(p+3) - 1$, wobei $p$ eine Primzahl ist. Für welche $p$ ist $q$ prim?

## Aufgabe **3** (20 Punkte, Rest 430 Punkte)

(2 Versuche)

Gegeben sei ein 5x5-Schachbrett mit den Linien A-E und Reihen 1-5. Beim Schach kann eine Dame vertikal, horizontal oder diagonal ziehen. Auf den Feldern B2 und D1 stehen Damen. Wir wollen drei weitere Damen so auf dem Schachbrett platzieren, dass sich die Damen nicht gegenseitig bedrohen. Auf welchen drei Feldern müssen diese stehen?

# Aufgabe 4 (30 Punkte, Rest 400 Punkte)

(3 Versuche)

Die Standardgröße eines Fußballfeldes beträgt 105 x 68 Meter. Wir wollen wissen, wie viele Personen auf ein solches Fußballfeld passen, wenn jede Person mindestens anderthalb Meter Abstand zu allen anderen halten muss. Zwischen welchen beiden benachbarten Vielfachen von 100 liegt diese maximale Anzahl? (Hinweis: $\sqrt{3} \approx 1.73$)

# Aufgabe 5 (20 Punkte, Rest 380 Punkte)

(2 Versuche)

Wir betrachten fünf Zahlen in einer Reihe. Wenn eine Zahl zwei Nachbarn hat, dann ist die Zahl gleich der Summe der beiden Nachbarn. Außerdem wissen wir, dass die Summe der fünf Zahlen gleich 237 ist. Was ist der Wert der mittleren Zahl?

# Aufgabe 6 (30 Punkte, Rest 350 Punkte)

(3 Versuche)

Eine Mathelehrerin setzt allen 23 Schüler*innen ihrer Klasse Hüte auf. Die Schüler*innen können ihre eigenen Hüte nicht sehen, aber sie können die Hüte aller anderen Schüler*innen sehen. Die Idee ist, dass sie die Farbe ihres Hutes so schnell wie möglich erkennen können, ohne miteinander zu kommunizieren. Die Lehrerin hat ihnen nicht gesagt, welche Hüte im Spiel sind oder wie viele verschiedene Farben es gibt, aber sie hat den Schüler*innen gesagt, dass jede*r durch logisches Denken die Farbe seines oder ihres Hutes herausfinden kann. Das Spiel läuft folgendermaßen ab: Jede Minute ertönt eine Glocke und dann dürfen die Schüler*innen, die die Farbe ihres Hutes kennen, diese benennen. Das passiert:

- beim ersten Glockenton benennen 4 Schüler*innen die Farbe ihres Hutes,
- beim zweiten Glockenton benennen 3 Schüler*innen die Farbe ihres Hutes,
- beim dritten Glockenton benennt niemand die Farbe seines Hutes,
- beim vierten Glockenton benennen einige Schüler*innen die Farbe ihres Hutes. Ihre Hüte haben nicht alle die gleiche Farbe.

Wie viele Schüler*innen benennen beim fünften Glockenton die Farbe ihres Hutes? Ihr könnt davon ausgehen, dass alle Schüler*innen sehr clever sind und das Spiel perfekt spielen.

# Aufgabe 7 (20 Punkte, Rest 330 Punkte)

(3 Versuche)

Ein Gitter in der Ebene wird *vervollständigt*, indem der Mittelpunkt jedes Quadrats, dessen Eckpunkte zum Gitter gehören, zum Gitter hinzugefügt wird, sofern er nicht zuvor schon zum Gitter gehörte. Wir betrachten ein quadratisches $10 \times 10$ - Gitter $R$. Wir vervollständigen $R$ zu einem Gitter $R'$, und dann vervollständigen wir $R'$ zu einem Gitter $R''$. Wie viele Gitterpunkte hat $R''$?

# Aufgabe 8 (30 Punkte, Rest 300 Punkte)

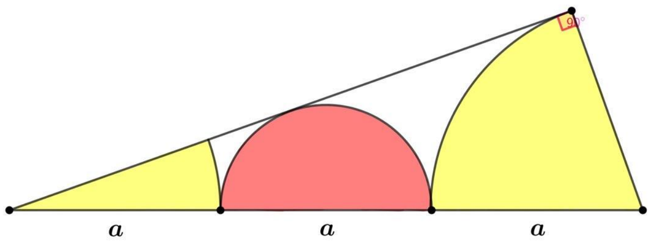
(2 Versuche)

Das Krümelmonster besitzt 15 Dosen, die 1, 2, … 15 Kekse enthalten. Jedes Mal kann es eine beliebige Anzahl von Dosen wählen und entnimmt dann aus jeder der gewählten Dosen eine identische Anzahl von Keksen, also so viele Kekse es will, aber aus jeder Dose gleich viele Kekse. Einen solchen Vorgang bezeichnen wir als eine Runde. Was ist die kleinstmögliche Anzahl von Runden, die das Krümelmonster braucht, um alle Keksdosen zu leeren?

# Aufgabe **9** (20 Punkte, Rest 280 Punkte)

(3 Versuche)

Die Größe der gelben Fläche beträgt 64. Wie groß ist die Fläche des roten Halbkreises?



# Aufgabe **10** (30 Punkte, Rest 250 Punkte)

(3 Versuche)

Was ist die Summe aller reellen Lösungen von

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)(x+1)=\frac{45}{32} \quad ?$$

# Aufgabe **11** (20 Punkte, Rest 230 Punkte)

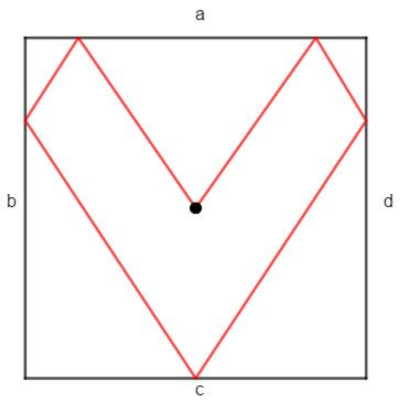
(2 Versuche)

In Galaxien gibt es nur zwei Arten von Münzen, eine 3-Centauri- und eine 23-Centauri-Münze. Was ist der größte Betrag, der nicht mit diesen Münzen bezahlt werden kann?

# Aufgabe 12 (30 Punkte, Rest 200 Punkte)

(2 Versuche)

Wie lang ist der kürzeste Weg in einem Quadrat mit Kantenlänge 1 und Seiten $a, b, c, d$, der vom Mittelpunkt des Quadrates losgeht und an allen vier Seiten $a, b, c, d, a$ einzeln (also nicht in den Eckpunkten) reflektiert wird, bevor er zum Mittelpunkt zurückkehrt (siehe Skizze)?



## Aufgabe **13** (20 Punkte, Rest 180 Punkte)

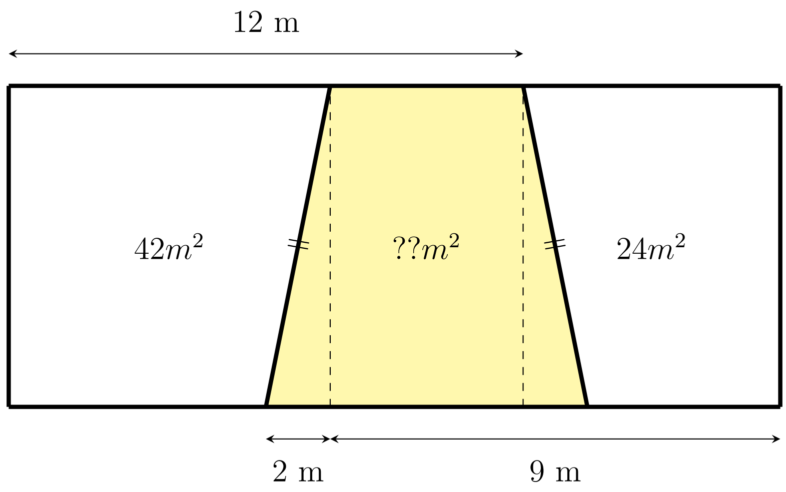
(3 Versuche)

Wie viele Paare echt positiver ganzer Zahlen $(a, b)$ gibt es, so dass die Summe des größten gemeinsamen Teilers von $a$ und $b$ und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $a$ und $b$ gleich 2021 ist?

# Aufgabe **14** (30 Punkte, Rest 150 Punkte)

(2 Versuche)

Gegeben sei die folgende Abbildung




Wie groß ist die gelbe Fläche (in $m^2$)?

# Aufgabe **15** (20 Punkte, Rest 130 Punkte)

(3 Versuche)

Sechs Personen arbeiten in einem Büro: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ und $F$. Sie haben unterschiedliche Arbeitszeiten, nämlich

> 12–2,
> 12–1 und 2–3,
> 1–5,
> 2–4,
> 3–6,
> 5–6.

Außerdem gilt Folgendes:

- I Zu jedem Zeitpunkt zwischen 12 und 6 Uhr muss mindestens eine der folgenden Personen $A$, $B$ und $C$ anwesend sein.
- II $A$ arbeitet länger als $B$; $B$ arbeitet länger als $C$.
- III $B$ und $F$ sehen sich, wenn der eine geht und der andere kommt.
- IV $E$ beginnt früher als $B$.

Wer arbeitet zu den angegebenen Zeiten?

# Aufgabe **16** (30 Punkte, Rest 100 Punkte)

(2 Versuche)

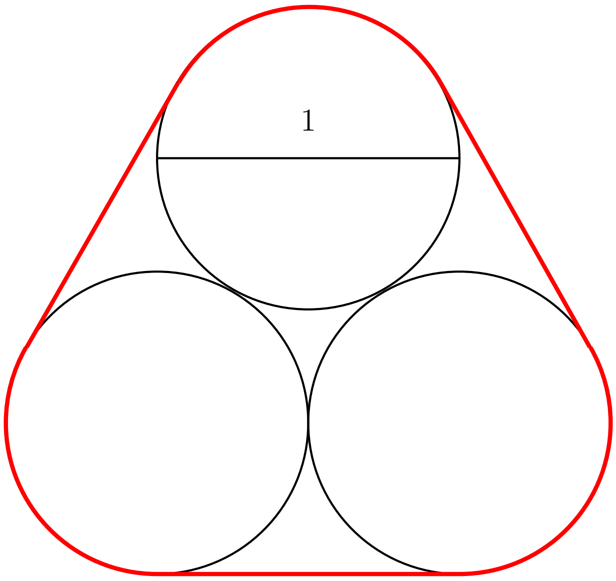
Beim Schach macht der Springer L-förmige Züge: Er kann zwei Felder in eine Richtung (horizontal oder vertikal) ziehen und danach ein Feld in eine dazu senkrecht verlaufende Richtung. Dummerweise hat sich unser Pferd am Bein verletzt und humpelt: Es wechselt nun zwischen einem normalen Springerzug und einem kürzeren Zug, mit dem es sich von seinem Ausgangsfeld nur auf ein diagonal angrenzendes Feld bewegen kann.

Ein Schachbrett hat die Größe $5 \times 6$ und der verletzte Springer beginnt mit einem normalen Springerzug. Wie viele Züge kann er höchstens machen, bevor er zu einem Platz zurückkehrt, auf dem er schon einmal war?

# Aufgabe **17** (20 Punkte, Rest 80 Punkte)

(3 Versuche)

Wir haben 3 gleich große Kreise mit Durchmesser 1. Um diese Kreise ziehen wir einen roten Faden.

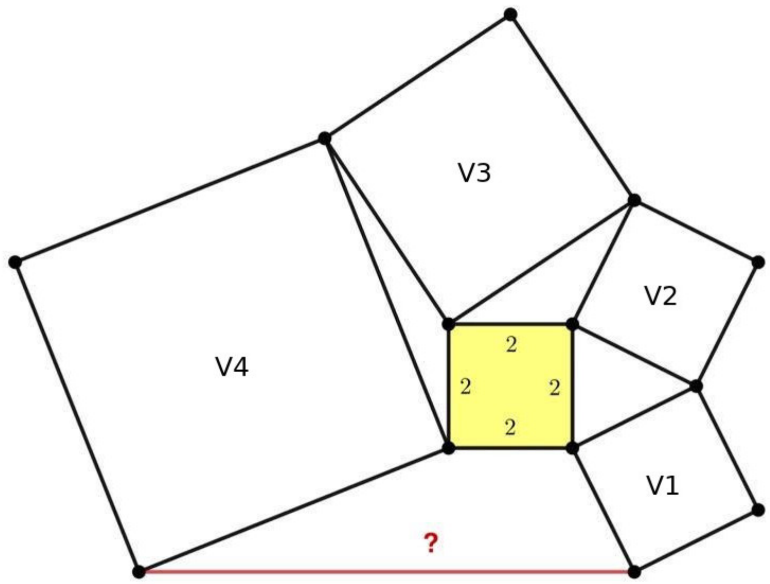



Wie lang ist der rote Faden?

# Aufgabe 18 (30 Punkte, Rest 50 Punkte)

(3 Versuche)

An ein Quadrat mit Seitenlänge 2 (gelb) werden 4 Quadrate so angelegt, dass sie das gelbe Quadrat an ihren Ecken berühren. Außerdem haben die 4 Quadrate jeweils eine Ecke mit einem der anderen Quadrate gemeinsam. Wie lang ist die rote Strecke?



# Aufgabe 19 (20 Punkte, Rest 30 Punkte)

(2 Versuche)

Ein Rechteck hat den Flächeninhalt $A$ mit der Länge $l$ und der Breite $b$. Wird bei diesem Rechteck die Länge um 10% verlängert und die Breite um $p$% verkürzt, verringert sich der Flächeninhalt $A$ um 12% Wie groß ist $p$?

## Aufgabe **20** (30 Punkte, Rest 0 Punkte)

(3 Versuche)

Gegeben seien zehn bebilderte Karten. Egal, welche Karten man wählt und wie man sie nebeneinander legt, man wird immer eine Landschaft sehen. Hier ist ein Beispiel mit sieben Karten:

Eine Landschaft muss vereinbarungsgemäß aus mindestens zwei Karten bestehen. Man kann berechnen, dass 9864090 Landschaften gebildet werden können.

Wie viele Landschaften sind möglich, wenn eine der zehn Karten verloren geht?