Ausarbeitung Aufgabe 1

Wegen

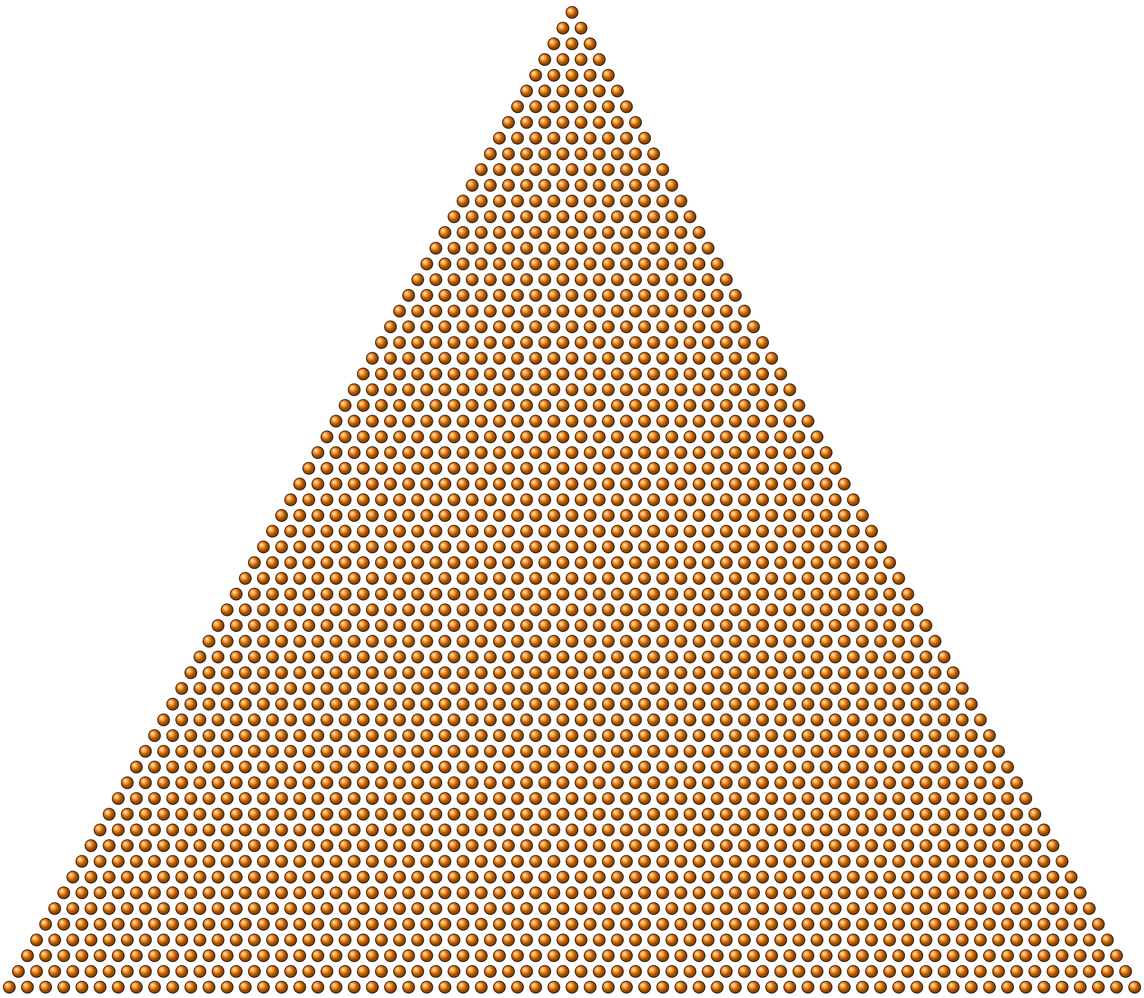
$$\begin{aligned} 2\cdot\big(1+2+3+\cdots+n\big) &= \big(1+2+3+\cdots+n\big)+\big(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1\big)\\ &= \big(1+n\big)+\big(2+(n-1)\big)+\big(3+(n-2)\big)+\cdots+\big(n+1\big)\\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

gilt, dass:

$$n(n+1) = 2\cdot 2016 = 2\cdot 32\cdot 9\cdot 7 = 64\cdot 63$$

Somit ist $n = 63$.

Die Abbildung zeigt ein Dreiecksmuster aus 2016 Kugeln. Daher der Name Dreieckszahl.



Ausarbeitung Aufgabe **2**

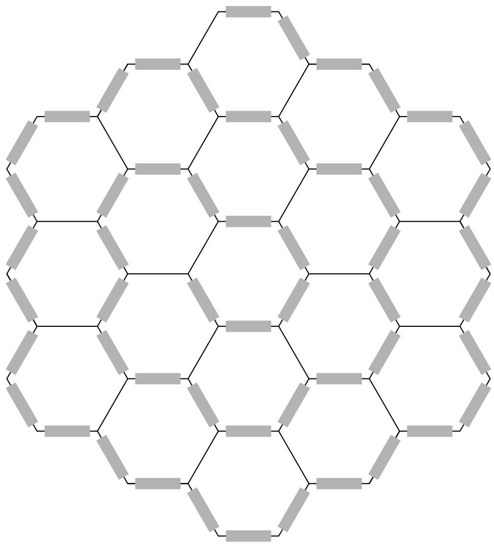
Wir bezeichnen den Radius des größeren Kreises mit R. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten von zwei horizontal oder vertikal nebeneinander liegenden Kreisen ist dann $R + 1$. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten von zwei diagonal nebeneinander liegenden Kreisen ist dann $2R$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt nun, dass

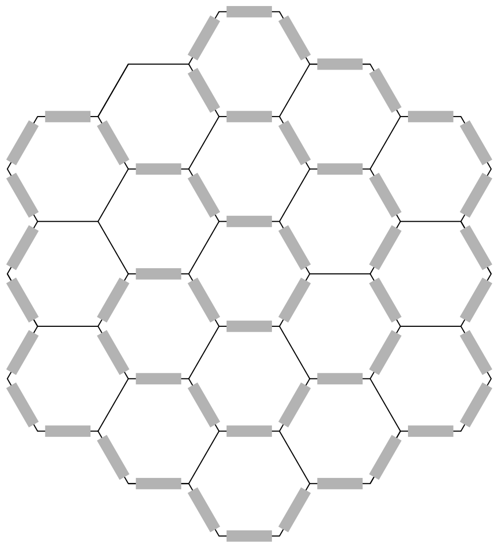
$$(R+1)^2 + (R+1)^2 = (2R)^2$$

bzw. $2R^2 + 4R + 2 = 4R^2$. Durch -2 teilen liefert: $-R^2 - 2R - 1 = -2R^2$. Addition von $2R^2 + 2$ auf beiden Seiten ergibt: $R^2 - 2R + 1 = 2$. Also $(R-1)^2 = 2$. Daraus folgt, dass $R = \sqrt{2} + 1$.

Ausarbeitung Aufgabe **3**

Es ist möglich, eine 'Handelsroute' zu legen, die alle Eckpunkte passiert, siehe links unten. Die Länge dieser Handelsroute ist um 1 kleiner als die Anzahl der Eckpunkte.





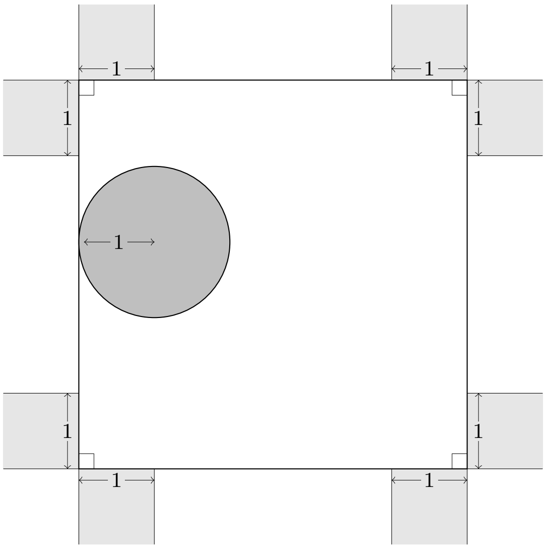
Es ist auch möglich eine Handelsroute ohne Start- und Endpunkt zu legen, siehe rechts oben. Die Länge einer solchen zyklischen Handelsroute ist gleich der Anzahl der Eckpunkte.

Aber für zyklische Handelsrouten gilt, dass es immer einen Eckpunkt gibt, der nicht auf der Handelsroute liegt. Die Handelsroute kann nämlich nicht den gesamten Rand vom Spielbrett durchlaufen, es sei denn die Handelsroute ist eben genau der Rand, aber dann fallen noch mehr Eckpunkte aus.

Wir müssen also die Anzahl der Eckpunkte zählen. Das Sechseck in der Mitte hat 6 Eckpunkte. Der Ring darum hat $3 \times 6 = 18$ Eckpunkte. Der äußere Rand hat $5 \times 6 = 30$ Eckpunkte. Das ergibt insgesamt 54 Eckpunkte. Die Antwort ist 1 weniger, also 53.

Ausarbeitung Aufgabe **4**

Der Kreis, da er nicht in die Ecken des Quadrats gelangt, rollt nicht auf dem gesamten Umfang des Quadrats ab; 8 Strecken der Länge 1 werden nicht durchlaufen. Der Umfang des Quadrats ist somit um 8 (Einheiten) länger als das Doppelte des Kreisumfangs.



Der Umfang des Quadrats ist daher $2 \cdot 2\pi + 8 \cdot 1 = 4\pi + 8$, und die Seitenlänge des Quadrats beträgt somit $\pi + 2$.

Ausarbeitung Aufgabe 5

Da $ab - cd$ ein Quadrat ist, gilt $ab \geq cd$. Also

$$ab + cd \leq ab + ab \leq 20 + 20 = 40$$

Da $ab + cd$ ein Quadrat ist, gilt $ab + cd \leq 36$.

Angenommen $ab + cd = 36$. Dann ist $ab - cd$ ein gerades Quadrat. Falls $ab - cd = 0$, so ist $ab = cd = 18$, also

$$abcd = 1818$$

Falls $ab - cd \geq 4$, so ist

$$ab = \frac{1}{2}(ab + cd) + \frac{1}{2}(ab - cd) \geq \frac{1}{2}(36 + 4) = 20$$

also $ab = 20$, aber das kann nicht sein, weil dann gilt $cd = 16$.

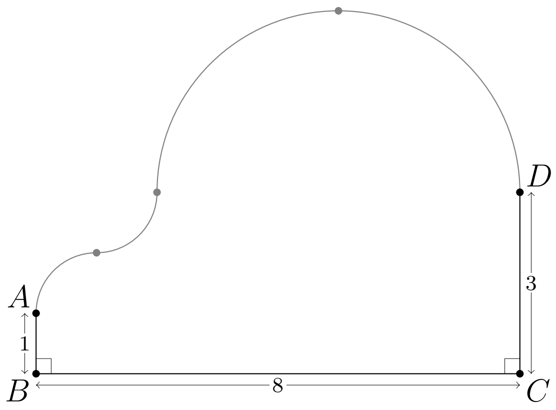
Angenommen $ab + cd = 25$. Dann ist $ab - cd$ ein ungerades Quadrat. Falls $ab - cd = 25$, so ist $ab = 25$, aber das kann nicht sein. Also gilt $ab - cd \leq 9$ und

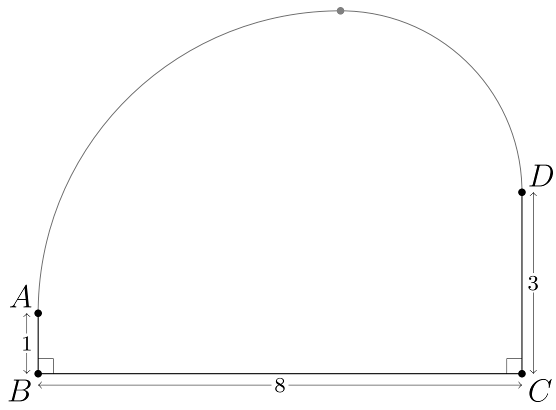
$$ab = \frac{1}{2}(ab + cd) + \frac{1}{2}(ab - cd) \leq \frac{1}{2}(25 + 9) = 17$$

Aber $17 < 18$. Wir brauchen $ab + cd \leq 16$ nicht weiter zu untersuchen, denn es ist schon klar, dass $abcd = 1818$ die letzte besondere Jahreszahl war.

Ausarbeitung Aufgabe 6

Die Länge eines Viertelkreises mit Radius r ist $\frac{1}{2}\pi \cdot r$. Die Breite von so einem Viertelkreis ist r. Da wir einen horizontalen Abstand von 8 überbrücken müssen, muss die Summe der Radien der Viertelkreise mindestens 8 betragen. Die Summe der Längen der Viertelkreise ist dann mindestens $\frac{1}{2}\pi \cdot 8 = 4\pi$.





Ein Viertelkreis-Weg der Länge 4π ist tatsächlich möglich. Die obige Abbildung zeigt zwei Beispiele.

Ausarbeitung Aufgabe 7

Da $1/a$ zwischen 0 und 1 liegt, gilt

$$a = 1/a + 10$$

Also $a^2 - 10a - 1 = 0$, bzw.

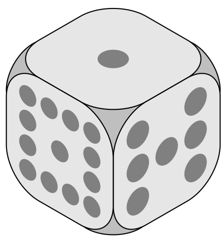
$$(a-5)^2 = a^2 - 10a + 25 = 26$$

Da $a > 0$, ist $a = 5 + \sqrt{26}$.

Ausarbeitung Aufgabe 8

Angenommen wir werfen $1, 2, 3, \ldots, n$ mit einem gewöhnlichen und einem besonderen Würfel. Um n werfen zu können, muss der besondere Würfel eine Seite mit mindestens $n-6$ Augen haben. Allerdings können wir solch eine Seite nicht für das Werfen von $n-6$ Augen verwenden: dafür benötigt man eine andere Seite des besonderen Würfels. Und zwar eine Seite mit mindestens $n-12$ Augen.

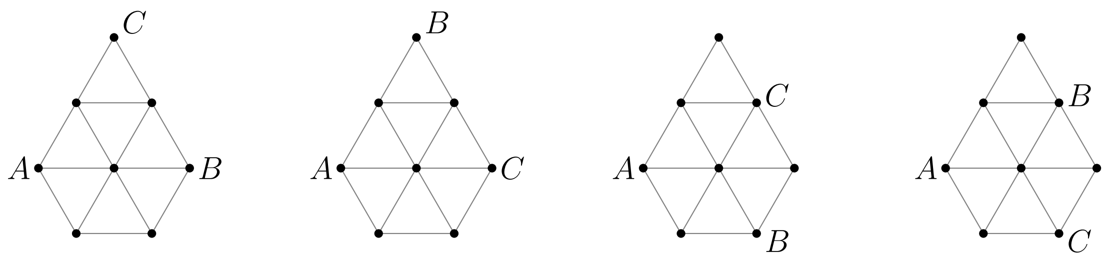
Wenn $n \geq 20$ sein soll, benötigt unser besonderer Würfel somit eine Seite mit mindestens 14 Augen und eine Seite mit mindestens 8 Augen, zusammen sind das schon 22 Augen. Aber ein gewöhnlicher Würfel hat nur 21 Augen. Also geht das nicht.



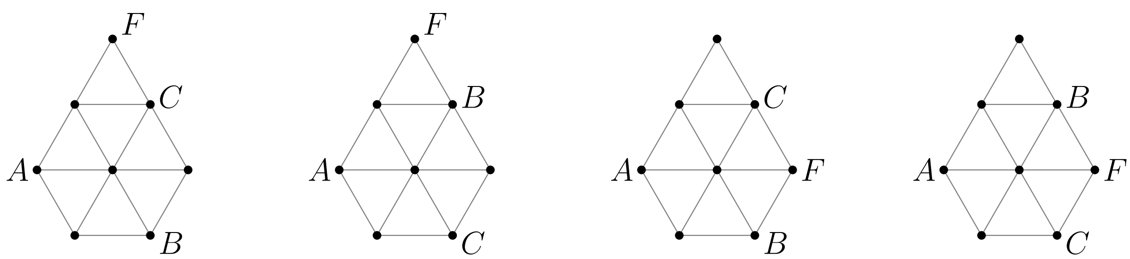
$n = 19$ können wir realisieren: Eine Seite mit 13 Augen, eine Seite mit 7 Augen, und eine Seite mit 1 Auge. Mit diesen drei Seiten und einem gewöhnlichen Würfel kann man $2, 3, 4, \ldots, 19$ werfen. Die übrigen drei Seiten des besonderen Würfels haben keine Augen. Somit kann auch die 1 gewürfelt werden.

Ausarbeitung Aufgabe 9

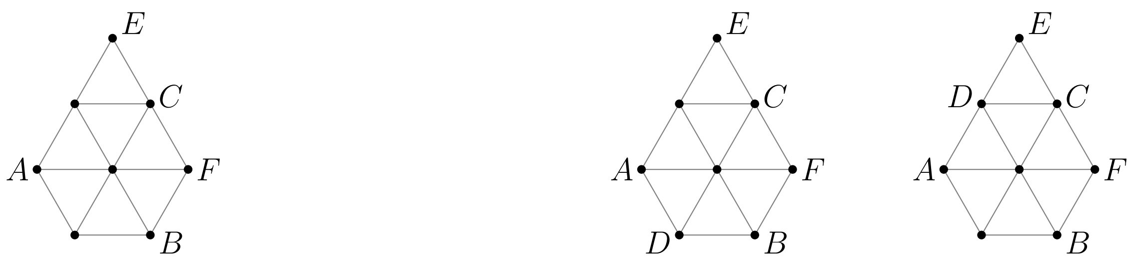
Der kleinste Abstand zwischen zwei Punkten ist 1, daher folgt aus $|GH| < |AB| = |AC| = |BC|$, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist, dessen Seitenlänge größer als 1 ist. Es kommen daher nur vier Möglichkeiten für die Positionen von A, B und C in Frage:



Die ersten beiden beiden Möglichkeiten fallen weg, da $|AF| > |AC|$. Es kommen noch vier Möglichkeiten für die Positionen von A, B, C und F in Betracht:



Nur bei der dritten Möglichkeit kann E so gewählt werden, dass $|AF| < |BE|$:



Schließlich folgern wir noch, dass D auf dem Rand liegt. Die Antwort ist somit E, C, F.

Ausarbeitung Aufgabe 10

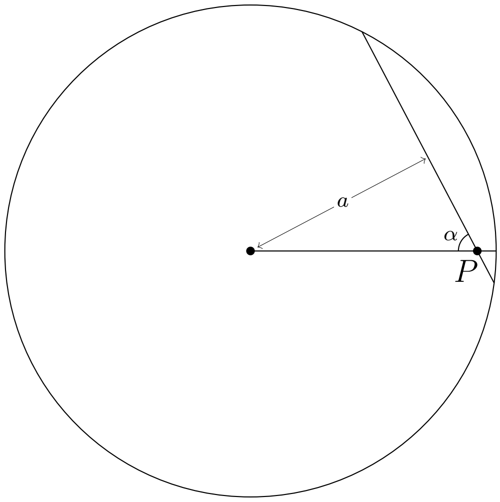
Die längste Sehne durch P ist die Sehne, die durch P und den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Die Länge dieser Sehne beträgt 26.

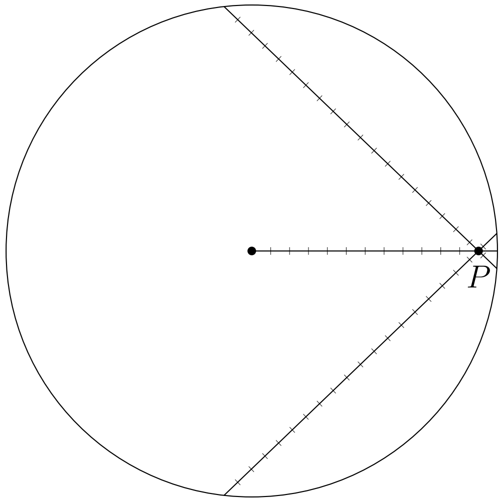
Die Sehne durch P, die senkrecht zur längsten Sehne steht, hat die Länge

$$2\sqrt{13^2 - 12^2} = 2\sqrt{25} = 10$$

Dies ist, so behaupten wir, gleichzeitig die kürzeste Sehne durch P. Um das zu zeigen, betrachten wir eine beliebige Sehne durch P. Sei α der Winkel zwischen dieser Sehne und dem Radius des Kreises, der durch P verläuft.

In der Abbildung (links unten) sehen wir, dass der Abstand a zwischen dieser Sehne und dem Mittelpunkt des Kreises $12 \sin \alpha$ beträgt. Je kleiner der Winkel α, desto kleiner ist also der Abstand zum Mittelpunkt des Kreises und desto länger ist die Sehne. Daraus folgt, dass die Sehne durch P am kürzesten ist, wenn $\alpha = 90°$ ist. Also hat die kürzeste Sehne durch P tatsächlich die Länge 10.





Es gibt also eine Sehne der Länge 10 und eine Sehne der Länge 26 durch P. In der Abbildung (rechts oben) sehen wir zwei Sehnen durch P der Länge 20. Aus der Tatsache, dass die Sinusfunktion zwischen 0° und 90° streng monoton steigt, können wir folgern, dass dies auch die einzigen Sehnen der Länge 20 durch P sind. Genauso gilt für jede andere ganze Zahl n, die größer als 10 und kleiner als 26 ist, dass es genau zwei Sehnen durch P der Länge n gibt.

Die Gesamtzahl der Sehnen durch P mit ganzzahliger Länge ist daher: $2 \cdot (26 - 10) = 32$.

Ausarbeitung Aufgabe 11

Gesucht sind ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^3 y - y^3 x = 2016$ mit $x > y > 0$. Faktorisierung liefert $xy(x-y)(x+y) = 2016$. Auch hier ist es sinnvoll, die Differenz zwischen x und y zu betrachten, also $x = y + d$ mit $d > 0$. Dies führt zu folgender Gleichung (*)

$$d \cdot y \cdot (y + d) \cdot (2 \cdot y + d) = 2016 = 25327$$

$d = 1$ liefert: $1 \cdot y \cdot (y+1) \cdot (2 \cdot y + 1) = 2016$. $y = 9$ ergibt für die linke Seite $1710, y = 10$ andererseits 2310, sodass kein ganzzahliges y diese Gleichung erfüllt. $d = 2$ liefert: $2 \cdot y \cdot (y+2) \cdot (2 \cdot y + 2) = 2016$ bzw. $4 \cdot y \cdot (y+1) \cdot (y+2) = 25327$, was dasselbe ist wie $y \cdot (y+1) \cdot (y+2) = 7 \cdot 8 \cdot 9$, woraus sich $y = 7$ und $x = 9$ ergibt. Betrachtet man die ursprüngliche Gleichung (*), so kann man leicht sehen, dass $y = 2$ und $d = 8$ sein muss. Die Inspektion dieser restlichen 6 Fälle ergibt, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Ausarbeitung Aufgabe 12

In der Dose bleiben stets 25 Milliliter übrig, also können wir die Sirupkonzentration in der Dose minimieren. Wenn wir die 25 Milliliter Flüssigkeit in der Dose mit x Millilitern Wasser verdünnen, nimmt die Sirupkonzentration mit dem Faktor $25/(x + 25)$ ab.

Es scheint plausibel den Inhalt der Flasche beide Male gleich stark zu verdünnen. Wenn wir beim ersten Mal $100+x$ Milliliter Wasser hinzufügen und beim zweiten Mal $100-x$, dann haben wir schließlich 200 ml Limonade im Glas. Wir vermuten, dass x Null ist. Wenn das tatsächlich der Fall ist, wird die obenstehende Annahme unsere Rechnung vereinfachen.

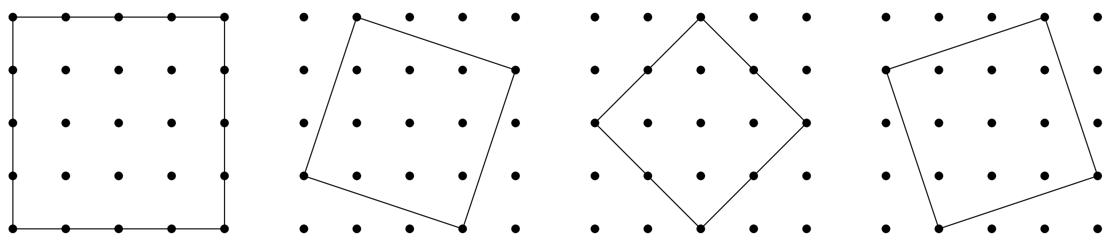
Die Konzentration Sirup in der Dose wird so schließlich

$$\frac{25}{100+x+25} \cdot \frac{25}{100-x+25} = \frac{25}{125+x} \cdot \frac{25}{125-x} = \frac{1}{5+\frac{1}{25}x} \cdot \frac{1}{5-\frac{1}{25}x} = \frac{1}{25-\frac{1}{625}x^2}$$

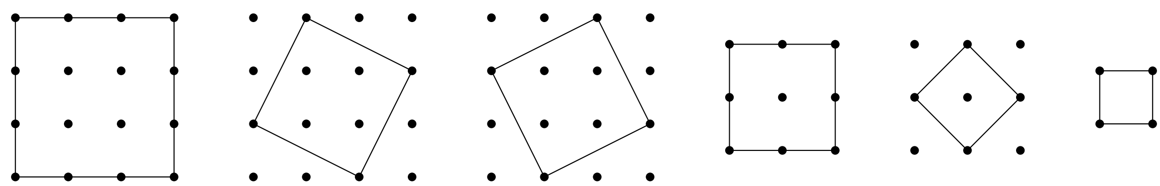
Also ist $\frac{1}{25}$ die kleinstmögliche Konzentration, die in der Dose übrig bleibt, und tatsächlich ist x dann Null. Also kommen $25-1=24$ ml Sirup in die Limonade.

Ausarbeitung Aufgabe **13**

Wir betrachten zunächst alle Quadrate, die die volle Breite des Gitters ausschöpfen. Es gibt 4 solche Quadrate.



Dann suchen wir nach alle Quadrate, die nicht die volle Breite des Gitters benötigen. Bis auf Verschiebung sind das die folgenden Quadrate.



Für die ersten 3 Quadrate kann die Verschiebung auf 2×2 Weisen gewählt werden. Für die 2 Quadrate danach kann die Verschiebung auf 3×3 Weisen gewählt werden. Für das letzte Quadrat kann die Verschiebung auf 4×4 Weisen gewählt werden.

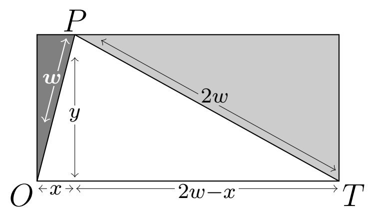
Die Antwort ist somit

$$4 \cdot 1 \cdot 1 \;+\; 3 \cdot 2 \cdot 2 \;+\; 2 \cdot 3 \cdot 3 \;+\; 1 \cdot 4 \cdot 4 \;=\; 4 \;+\; 12 \;+\; 18 \;+\; 16 \;=\; 50$$

Ausarbeitung Aufgabe **14**

Wir geben 3 Lösungen.

1 Quick and dirty Offenbar spielt es keine Rolle, wie das Dreieck im Rechteck liegt. Wir schauen uns daher den einfacheren Spezialfall an, bei dem einer der Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks mit einer Rechtecksseite zusammenfällt.



Sei T die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, sei O die weitere Ecke des Dreiecks, die mit einer Ecke des Rechtecks zusammenfällt und sei P die dritte Ecke des Dreiecks.

Sei $w = |OP|$. Dann gilt $|OT| = 2w = |PT|$. Sei x der Abstand von P zur kurzen Rechtecksseite gegenüber von T. Sei y der Abstand von P zur längeren Rechtecksseite gegenüber von P.

Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass gilt:

$$|OP|^2 - x^2 = y^2 = |PT|^2 - (|OT| - x)^2$$

Also:

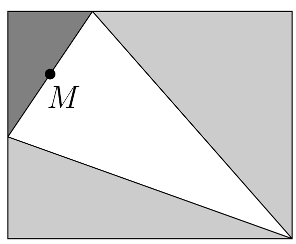
$$w^2 - x^2 = (2w^2) - (2w - x)^2 = 4w^2 - (4w^2 - 4wx + x^2)$$

Daraus folgt, dass $w^2 = 4wx$, also $w = 4x$. Der Flächeninhalt des dunkelgrauen Dreiecks beträgt $\frac{1}{2}xy$. Der Flächeninhalt des hellgrauen Dreiecks beträgt

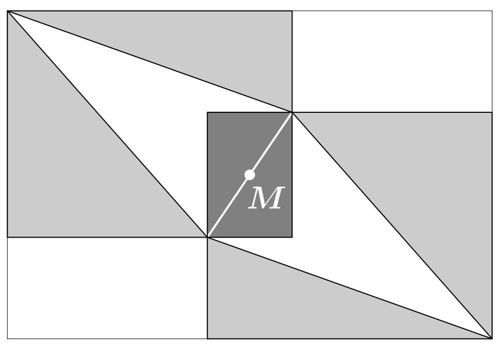
$$\tfrac{1}{2}(2w - x)y = \tfrac{1}{2}(8x - x)y = \tfrac{7}{2}xy$$

Somit ist der Flächeninhalt des hellgrauen Dreiecks 7 mal so groß wie der Flächeninhalt des dunkelgrauen Dreiecks.

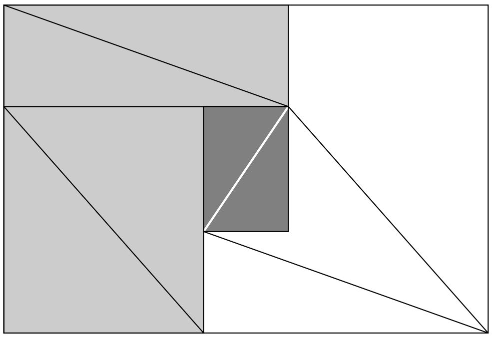
2 Geometrisch Sei M die Mitte der Basis des gleichschenkligen Dreiecks.



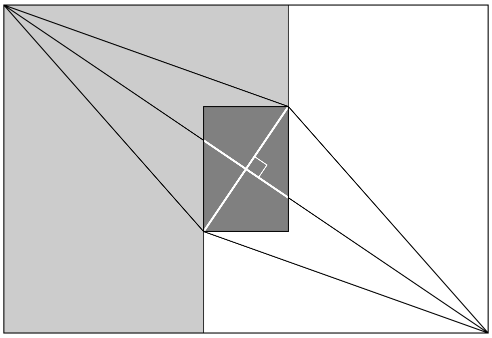
Wir verdoppeln die grauen Dreiecke, indem wir ihre Spiegelbilder bezüglich M hinzufügen. Die auf diese Weise entstehende Figur ergänzen wir noch durch zwei weiße Rechtecke, sodass der Rand der Figur ein Rechteck wird.



Nun ordnen wir die hellgrauen Dreieck anders an. Dadurch sehen wir, dass der weiße Teil des großen Rechtecks flächeninhaltstechnisch genausogroß ist wie der hellgraue Teil.



Da das weiße Dreieck, mit dem wir begannen, gleichschenklig ist, steht eine der Diagonalen des großen Rechtecks senkrecht zu einer der Diagonalen des kleinen dunkelgrauen Rechtecks.



Das große Rechteck ist ähnlich zum kleinen dunkelgrauen Rechteck, da auch die kurze Seite des großen Rechtecks senkrecht steht zur kurzen Seiten kleinen dunkelgrauen Rechtecks.

Sei d die Länge der Basis des gleichschenklichen Dreiecks. Aus dem Satz des Pythagoras folgt für die Länge der halben Diagonale des großen Rechtecks:

$$\sqrt{(2d)^2 - (\tfrac{1}{2}d)^2} = \sqrt{4 - \tfrac{1}{4}} \cdot d = \sqrt{16 - 1} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot d$$

Die Längen der Diagonalen des kleinen und großen Rechtecks sind somit d und $\sqrt{15} \cdot d$. Folglich ist der Flächeninhalt des großen Rechtecks 15 mal so groß wie der Flächeninhalt des kleinen dunkelgrauen Rechtecks.

Der Flächeninhalt des kleinen Rechtecks ist 2. Der Flächeninhalt des großen Rechtecks ist daher 30. Der Flächeninhalt des großen Rechtecks ohne das kleine Rechteck beträgt 28, und die Hälfte davon ist hellgrau. Der hellgraue Teil des großen Rechtecks hat daher einen Flächeninhalt von 14, und das ist das Doppelte des Flächeninhalts der 2 hellgrauen Dreiecke mit denen wir begannen. Die Antwort ist somit: 7. waarmee we begonnen. Het antwoord is dus 7.

Der allgemeine Fall bei dem die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks nicht 2 mal, sondern $s > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mal so lang wie die Basis sind, geht genauso. Die Länge der halben Diagonale des großen Rechtecks beträgt dann

$$\sqrt{(sb)^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2} = \sqrt{s^2 - \tfrac{1}{4}} \cdot b = \sqrt{4s^2 - 1} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot b$$

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks ist dann $4s^2 - 1$ mal so groß wie der des kleinen dunkelgrauen Rechtecks, und die Antwort ist dann: $2s^2 - 1$.

3 Trigonometrisch Wie schon am Ende der vorherigen Lösung beweisen wir wieder das algemeinere Resultat, nämlich gleichschenklige Dreiecke deren Schenkel $s > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mal so lang wie die Basis sind. Dazu skalieren wir das Dreieck und das Rechteck so, dass das Dreieck zwei Seiten der Länge s und eine Seite der Länge 1 hat. Der Flächeninhalt des dunkelgrauen Dreiecks ist damit kleiner als 1 geworden.

Seien a und b die Flächeninhalte der hellgrauen Dreiecke. Sei c der Flächeninhalt des dunkelgrauen Dreiecks. Wir beweisen, dass gilt:

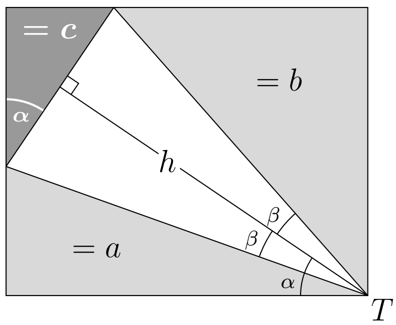
$$a + b = 2(s^2 - 1)c$$

Indem wir $s = 2$ setzen und die Skalierung rückgängig machen, sehen wir, dass die Antwort der Aufgabe 7 ist.

Wir verwenden die folgenden Formeln für den Sinus und den Kosinus:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{1}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{2}$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{3}$$
$$\cos(2\beta) = 1 - 2\big(\sin(\beta)\big)^2 \tag{4}$$

Sei T die Spitze und h die Höhe von T des gleichschenkligen Dreiecks. Sei α der Winkel bei T zwischen h und der Rechtecksseite des Dreiecks mit Flächeninhalt a. Sei β der Winkel bei T zwischen h und der Hypotenuse des Dreiecks mit Flächeninhalt a.



Bemerke, dass β auch der Winkel T zwischen h und der Hypotenuse des Dreiecks mit Flächeninhalt b ist. Genauso ist α auch einer der Winkel des dunkelgrauen Dreiecks.

Aus (3) folgt, dass

$$\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{2}s^2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{4}s^2\sin(2\alpha-2\beta)\\
b &= \tfrac{1}{2}s^2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{4}s^2\sin(2\alpha+2\beta)\\
c &= \tfrac{1}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \tfrac{1}{4}\sin(2\alpha)
\end{aligned}$$

Daher gilt wegen (2) und (1), dass:

$$\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{4}s^2\big(\sin(2\alpha)\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)\sin(2\beta)\big)\\
b &= \tfrac{1}{4}s^2\big(\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta)\big)
\end{aligned}$$

Daraus und aus (4) folgt, dass

$$\begin{aligned} a+b &= \tfrac{1}{2}s^2\sin(2\alpha)\cos(2\beta) = \tfrac{1}{2}s^2\sin(2\alpha)\big(1-2(\sin(\beta))^2\big) \\ &= \tfrac{1}{2}s^2\sin(2\alpha)\big(1-2(\tfrac{1}{2s})^2\big) = \tfrac{1}{2}s^2\sin(2\alpha)\big(1-\tfrac{1}{2s^2}\big) \\ &= \tfrac{1}{4}(2s^2-1)\sin(2\alpha) = (2s^2-1)c \end{aligned}$$

womit das Behauptete bewiesen ist.

Diese Aufgabe, für beliebige spitzwinklige gleichschenklige Dreiecke, stammt von Leon van den Broek. Auch die zweite Lösung stammt von ihm.

Leon (1947–2013) hat während seines Lebens große Beiträge zur Entwicklung des (niederländischen) Mathematikunterrichts geleistet und hat sich für die Popularisierung von Mathematik eingesetzt. Auch das Mathematikturnier ist über viele Jahre von ihm mitorganisiert worden.

Ausarbeitung Aufgabe **15**

Sei $|P|$ die Anzahl der Stunden, die Person P an einem Tag arbeitet. Aus I folgt, dass $|A| = 3$, $|B| = 2$ und $|C| = 1$. Aus II folgt, dass $|D| = 3$. Zusätzlich folgt aus II, dass es zwei Lösungen für B, C und D gibt

	Lösung 1	Lösung 2
12–2	B	
12–1 und 2–3		B
1–2		C
2–5	D	
3–6		D
5–6	C	

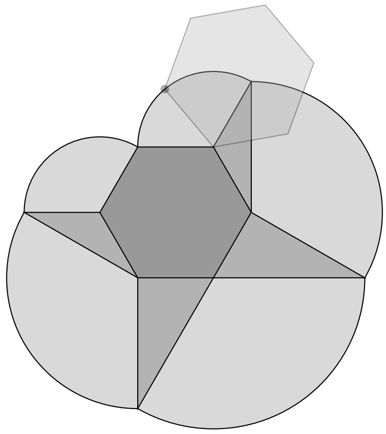
Da Person B in Lösung 2 um 3 Uhr geht, kann Person E nicht um 3 Uhr gehen. Dies lässt sich nicht vereinbaren mit III, also bleibt nur Lösung I. Nur E kann die Person sein, die von 1 Uhr bis 2 Uhr arbeitet. Da außerdem $|A| = 3$ und $A \neq D$, haben wir folgende Lösung:

	Lösung 1
12–2	B
12–1 und 2–3	F
1–2	E
2–5	D
3–6	A
5–6	C

Die Antwort ist somit B, F, E, D, A, C.

Ausarbeitung Aufgabe **16**

Die Kurve besteht aus fünf Drittelkreisen (120 Grad) mit den Radien 1, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{3}$ und 1.



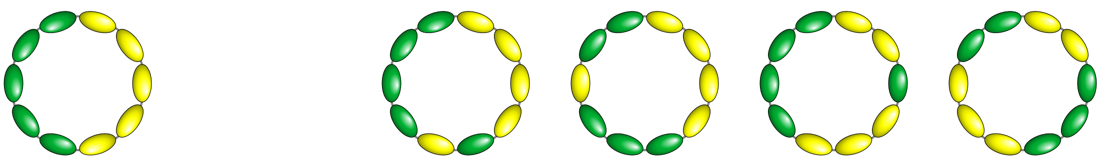
Die Summe der Flächeninhalte der fünf zugehörigen Kreissegmente ('Kuchenstücke') beträgt:

$$\frac{\pi}{3}\left(1^2+\sqrt{3}^2+2^2+\sqrt{3}^2+1^2\right)=\frac{\pi}{3}\cdot 12=4\pi$$

Die Fläche des Sechsecks in der Mitte ist gleich der Höhe mal der mittleren Breite, also $\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}$. Außerdem werden noch vier Dreiecke von der Kurve eingeschlossen, die zusammen auch wieder ein Sechseck mit Seitenlänge 1 bilden. Die Antwort ist somit $4\pi+3\sqrt{3}$.

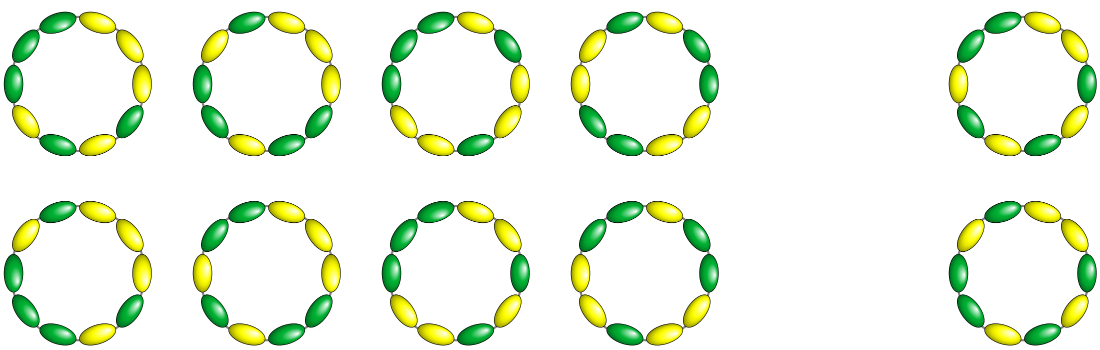
Ausarbeitung Aufgabe **17**

Wenn alle gelben Perlen hintereinander liegen, tun die grünen Perlen dies auch. Das liefert 1 mögliches Armband.



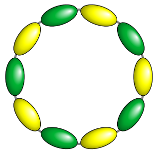
Wenn es zwei Gruppen von hintereinander liegenden gelben Perlen gibt, dann auch zwei Gruppen von hintereinander liegenden grünen Perlen. Das ergibt 4 mögliche Armbänder, die den 4 Aufteilungen der Perlen auf zwei gelbe und zwei grüne Gruppen entsprechen.

Wenn es drei Gruppen hintereinander liegender gelber Perlen gibt, dann gibt es auch drei Gruppen hintereinander liegender grüner Perlen. Das ergibt 8 mögliche Armbänder, nämlich 2 Armbänder für jede der 4 Aufteilungen der Perlen auf drei gelbe und drei grüne Gruppen.



Wenn es vier Gruppen hintereinanderliegender gelber Perlen gibt, dann gibt es auch vier Gruppen hintereinanderliegender grüner Perlen. Das ergibt 2 mögliche Armbänder, nämlich 2 Armbänder für die eindeutigen Verteilungen der Perlen in vier gelbe Gruppen und vier grüne Gruppen.

Zu guter Letzt können die gelben und grünen Perlen auch abwechselnd liegen.



Die Antwort ist somit $1 + 4 + 8 + 2 + 1 = 16$.

Ausarbeitung Aufgabe 18

Sei b die Breite des kleinen Quadrats und B die Breite des großen Quadrats. Da der Umfang des kreisförmigen Rings und des quadratischen Rings gleich sind, gilt:

$$2\pi R + 2\pi r = 4B + 4b$$

Da der Flächeninhalt des kreisförmigen Rings und des quadratischen Rings gleich sind, gilt:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = B^2 - b^2$$

Daraus folgt:

$$R - r = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi(R + r)} = \frac{B^2 - b^2}{2B + 2b} = \frac{B - b}{2} = \frac{B + b}{2} - b$$

Daher ist:

$$R - r = \frac{B + b}{2} - b = \frac{4B + 4b}{8} - b = \frac{2\pi R + 2\pi r}{8} - b = \frac{2\pi(R + r)}{8} - b$$

Daraus folgt:

$$R = \frac{R - r}{2} + \frac{R + r}{2} = \left(\frac{\pi(R + r)}{2} - \frac{b}{2}\right) + \frac{R + r}{2}$$

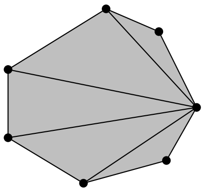
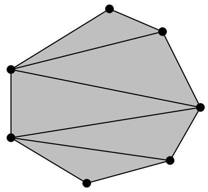
Ersetzen wir $R + r$ durch 1600, so erhalten wir:

$$R = \left(\frac{1600\pi}{8} - \frac{b}{2}\right) + \frac{1600}{2} = 200\pi + 800 - \tfrac{1}{2}b$$

Somit gilt $R < 200\pi + 800$ und alle $R < 200\pi + 800$ sind möglich. Daraus folgt, dass $628 + 800 = 1428$ der größtmögliche ganzzahlige Wert für R ist.

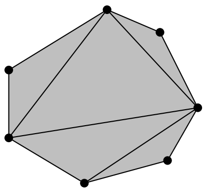
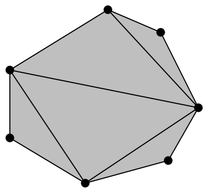
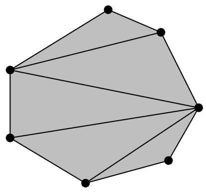
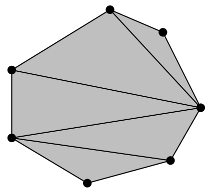
Ausarbeitung Aufgabe 19

Es gibt 7 Zerlegungen in Dreiecke, bei denen alle vier Diagonalen in einem Punkt zusammenkommen (siehe links unten).

Es gibt auch 7 Zerlegungen in Dreiecke, bei denen die vier Diagonalen ein 'Zickzack' bilden (siehe rechts oben).

Es gibt 14 Zerlegungen in Dreiecke, bei denen es ein Dreieck gibt dessen drei Seiten allesamt Diagonalen des Siebenecks sind (siehe links unten).

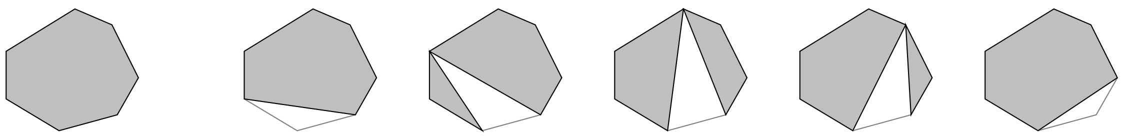
Schließlich gibt es noch 14 Zerlegungen in Dreiecke, bei denen genau drei von vier Diagonalen in einem Punkt zusammenstoßen, ohne dass es ein Dreieck gibt, dessen drei Seiten allesamt Diagonalen des Siebenecks sind (siehe rechts oben).

Insgesamt sind somit $7 + 7 + 14 + 14 = 42$ Zerlegungen möglich.

Die Anzahl der Zerlegungen in Dreiecke können wir auch auf andere Weise ausrechnen. Sei a_n die Anzahl der Zerlegungen eines konvexen n-Ecks in $n-2$ Dreiecke.

Wir möchten a_7 bestimmen. Wähle eine beliebige Seite eines konvexen Siebenecks und teile das Siebeneck in Dreiecke auf. Die gewählte Seite ist auch Seite eines der 5 Dreiecke in die das Siebeneck aufgeteilt wurde. Wir nehmen dieses Dreieck weg. Es bleiben dann ein oder zwei Vielecke übrig, die ihrerseits wiederum in Dreiecke zerlegt sind.

Indem wir alle Fälle untersuchen, erhalten wir folgende Gleichung:



$$a_7 \quad = \quad a_6 \quad + \quad a_3 \cdot a_5 \quad + \quad a_4 \cdot a_4 \quad + \quad a_5 \cdot a_3 \quad + \quad a_6$$

Allgemeiner gilt, dass $a_3 = 1$ und

$$a_n \;=\; a_{n-1} \;+\; a_3 \cdot a_{n-2} \;+\; a_4 \cdot a_{n-3} \;+\; \cdots \;+\; a_{n-3} \cdot a_4 \;+\; a_{n-2} \cdot a_3 \;+\; a_{n-1}$$

für alle ganzen Zahlen $n > 3$. Wir können damit a_n für alle n ausrechnen.

n	a_n
3	1
4	2
5	5
6	14
7	42
8	132
9	429

n	a_n
10	1430
11	4862
12	16796
13	58786
14	208012
15	742900
16	2674440

Ausarbeitung Aufgabe 20

Für Zahlen a, b, n sind die folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n} \qquad \frac{b+a}{a\,b} = \frac{1}{n} \qquad (a+b)n = a\,b$$

$$a\,b - (a+b)n - n^2 = n^2 \qquad (a-n)(b-n) = n^2$$

Wenn wir also $a' := a - n$ und $b' := b - n$ definieren, dann gilt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n} \qquad \text{genau dann wenn} \qquad a'\,b' = n^2$$

Wir können daher auch die Paare a', b' zählen, für die $a' < b'$ und $a'\,b' = n^2$ gilt.

Nimm $n = 2016$. Da $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$ ist, hat 2016^2

$$(10+1)(4+1)(2+1) = 165$$

Teiler. Davon sind k Teiler kleiner als 2016, $164 - k$ Teiler größer als 2016, und der letzte Teiler ist 2016 selbst. Wir können a' somit auf k Weisen wählen; b' liegt dann fest und ist für jedes a' verschieden.

Aber wir können auch b' auf $164 - k$ Weisen wählen, somit gilt: $k = 164 - k$. Daraus folgt, dass $k = 82$ ist, und das ist dann auch die Antwort.