hausdorff center for mathematics

Lösungen zum Vorbereitungsmaterial

Mathematikturnier 2015

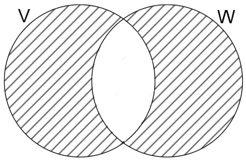
Inhaltsverzeichnis

1 Lösungen

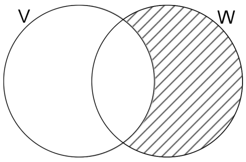
1.1 Mengenlehre

Aufgabe 1: $V \cap W$

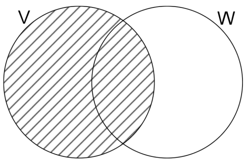
Aufgabe 2:



Aufgabe 3:



Aufgabe 4:



Aufgabe 5: $|V \Delta W| = 7$

Aufgabe 6: Wenn V eine beliebige Menge ist, dann gilt: $V \Delta V = \varnothing$

Aufgabe 7: $V \cap W = \varnothing$

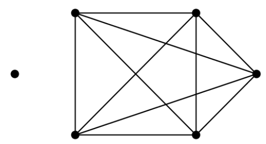
Aufgabe 8: $\overline{V} = \{1, 9, 15\}$

Aufgabe 9: Wenn $V \subseteq W$, dann $\overline{\overline{V}} = V$

1.2 Graphentheorie

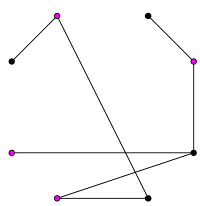
Aufgabe 10: Nein, wenn ein Graph zusammenhängend sein soll, muss zwischen jedem Paar aus zwei Knoten ein Pfad existieren. Es sind mindestens 5 Kanten nötig, um einen Zusammenhang herzustellen.

Aufgabe 11: Wenn du einen Graphen zeichnen willst, der nicht zusammenhängend ist, muss mindestens ein Knoten existieren, der nicht mit allen anderen Knoten verbunden ist. Die maximale Anzahl von Kanten, die in einem solchen Graphen angelegt werden kann, beträgt 10. Einen unzusammenhängenden Graphen mit 6 Knoten und 10 Kanten findest du in der untenstehenden Abbildung. Sobald du eine 11te Kante hinzufügst, wird der Graph zusammenhängend. Es besteht kein unzusammenhängender Graph mit 6 Knoten und 11 Kanten.



Aufgabe 12: Es besteht genau ein Pfad zwischen einem beliebigen Knotenpaar eines Baumes. Würde ein zweiter Pfad existieren, so würde der Graph einen Kreis enthalten (und damit kein Baum mehr sein).

Aufgabe 13



Aufgabe 14: Ja, ein solcher Graph enthält stets einen Kreis. Der Knoten mit Grad 4 ist viermal das Ende einer Kante. Dieser Knoten ist also mit allen anderen vier Knoten verbunden. In dem Graphen kommen jedoch noch weitere Kanten dazu. Daher muss der Graph einen Kreis enthalten.

Aufgabe 15:
a) $f([A,E]) = 15$, $f([B,E]) = 10$ en $f([C,D]) = 20$
b) Die Pfade A,E,C,D,G,E,F und A,E,G,D,C,E,F sind mit einem Gesamtwert von 85 am günstigsten.

1.3 Kombinatorik

Aufgabe 16:

a. $100! \approx 9.3 \times 10^{157}$

b. $\frac{100!}{97! \times 3!} = 161.700$

c. $\frac{100!}{97!} = 100 \times 99 \times 98 = 970.200$

d. $\frac{80!}{20! \times 60!} \approx 3.5 \times 10^{18}$

Aufgabe 17:

a. $\frac{99!}{100!} = \frac{1}{100}$

b. $\frac{\frac{99!}{2! \times 97!}}{\frac{100!}{3! \times 97!}} = \frac{3}{100}$

c. $\frac{\frac{30!}{20! \times 10!}}{\frac{80!}{20! \times 60!}} \approx \frac{30.045.015}{3.5 \times 10^{18}} \approx \frac{1}{1.17 \times 10^{11}} \approx 8.5 \times 10^{-12}$

Aufgabe 18:

$$\frac{18!}{4! \times 4! \times 4! \times 3! \times 3!} = 12.864.852.000$$

1.4 Erwartungswert

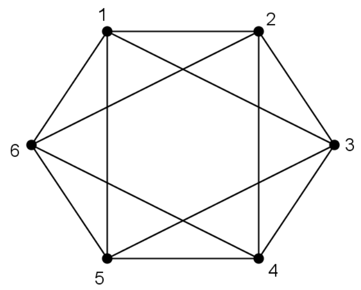
Aufgabe 19:

Glücksrad 1: $\frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{3} \times 4 = 5$
Glücksrad 2: $\frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 8 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 9 = \frac{19}{4} = 4.75$

Bei Spiel 1 ist der Erwartungswert höher. Dieses Spiel verspricht dem Spieler also den größeren (zu erwartenden) Erfolg.

1.5 Algorithmen

Aufgabe 20: Du kannst die Knoten des Graphen folgendermaßen nummerieren.



Einer der möglichen Eulerkreise ist dann: 1,2,3,4,5,6,4,2,6,1,3,5,1.

Aufgabe 21: Wenn $A = 24$ und $B = 18$, dann liefert der Algorithmus den Wert 6 als Output.
6 =ggT(24,18).
Der Output des Algorithmus ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen A und B, ggT(A,B).
Der Algorithmus wird auch Euklidischer Algorithmus genannt.