START MATHEMATIK-STAFFEL 2015

Ihr habt 60 Minuten Zeit für 20 Aufgaben.

Die Gesamtzahl der zu erreichenden Punkte ist 500.

Staffel-Aufgaben 1 (20 Punkte, Rest 480 Punkte)

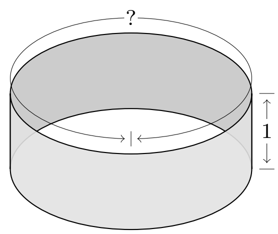
Gegeben sind drei verschiedene ganze Zahlen a, b und c, die jeweils größer als 0 und kleiner als 6 sind. Außerdem gilt Folgendes:

- Die Summe von b und c ist durch 3 teilbar;
- Die Summe von a und c ist durch 4 teilbar.

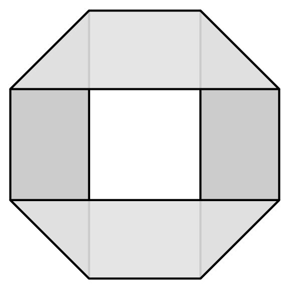
Was sind die möglichen Werte für a?

Staffel-Aufgaben $\boxed{2}$ (20 Punkte, Rest 460 Punkte)

Ein zylinderförmiger Papierring besitzt die Höhe 1.



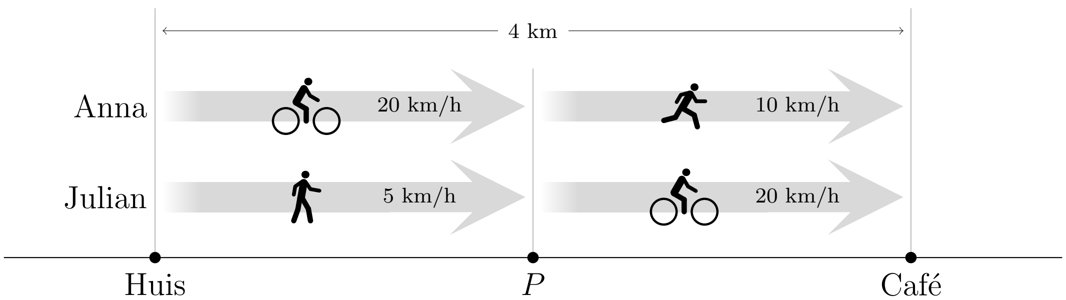
Wenn wir den Ring auf die richtige Weise auf einem Tisch plattdrücken, so erhalten wir eine Figur, deren Außenseite ein regelmäßiges Achteck formt.



Wie groß ist der Umfang des Papierringes?

Staffel-Aufgaben $\boxed{3}$ (30 Punkte, Rest 430 Punkte)

Anna und Julian gehen von ihrem gemeinsamen Haus zu einem Cafe, das 4 Kilometer entfernt liegt. Anna geht gerne joggen. Julian bevorzugt es gemütlich spazieren zu gehen. Um das Cafe schnell zu erreichen, entscheiden sie sich für ihre Fahrräder. Leider hat das Fahrrad von Julian einen platten Reifen. Sie beschließen nun Folgendes.
Anna fährt mit dem Fahrrad und einer Geschwindigkeit von 20 km/h bis zu einem festgelegten Punkt P. Danach steigt sie ab und joggt mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h bis zum Cafe.

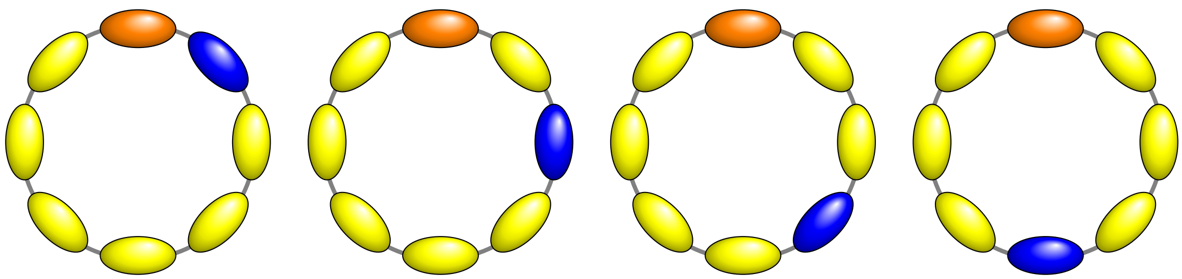


In der Zwischenzeit spaziert Julian mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h bis zum Punkt P. Dort angekommen steigt er auf Annas Fahrrad und fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h bis zum Cafe.
Anna und Julian wählen den Punkt P so, dass sie für den 4 km langen Weg genau die gleiche Zeit brauchen (das Ergebnis unterscheidet sich von der Abbildung). Wir nehmen an, dass die beiden, während sie unterwegs sind, auf keinerlei Hindernisse treffen. Außerdem vernachlässigen wir die Zeit, die für das Auf- und Absteigen vom Fahrrad nötig ist.

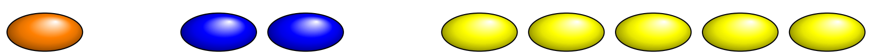
*Wie viele **Minuten** dauert es, bis die beiden am Cafe ankommen?*

Staffel-Aufgaben $\boxed{4}$ (20 Punkte, Rest 410 Punkte)

Wir basteln ein Armband aus 8 Perlen, mit den Farben orange , gelb und blau . Mit 1 orangen Perle, 1 blauen Perle und 6 gelben Perlen gibt es 4 Farbkombinationen: Es liegen stets 0, 1, 2 oder 3 gelbe Perlen zwischen der orangen und der blauen Perle (siehe folgende Abbildung).

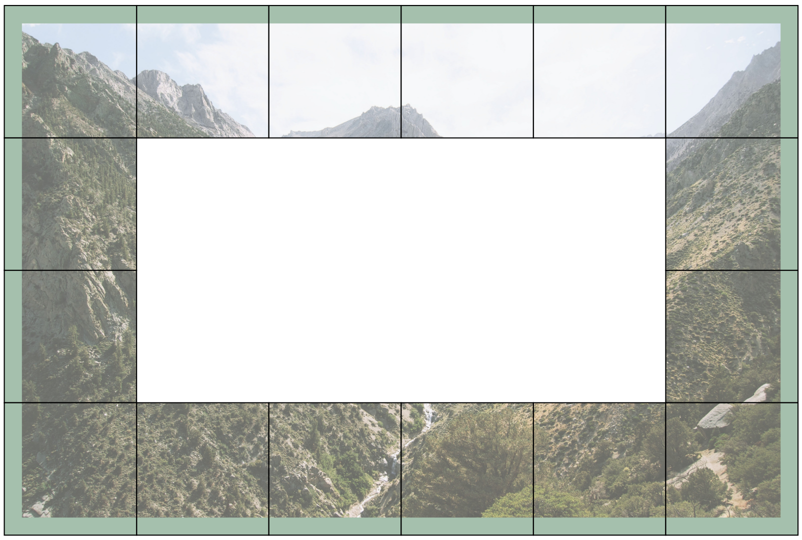


Wie viele Farbkombinationen sind mit 1 orangen Perle, 2 blauen Perlen und 5 gelben Perlen möglich?



Staffel-Aufgaben $\boxed{5}$ (30 Punkte, Rest 380 Punkte)

Peter und Marie legen jeweils ein rechteckiges Puzzle, das aus quadratischen Puzzlestücken besteht.

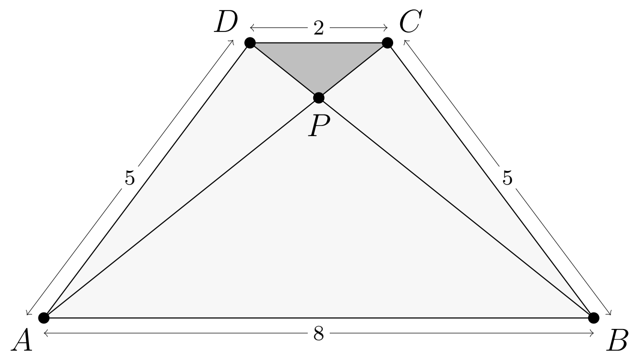


Sie beginnen mit dem Rand der Puzzles. Als Peter den Rand seines Puzzles fertig gelegt hat, hat er genau die Hälfte der Puzzlestücke verwendet (in dem oben abgebildeten Beispiel ist dies nicht so). Für das Puzzle von Marie gilt dasselbe. Allerdings hat sie eine andere Anzahl von Puzzlestücken als Peter.

Wie viele Puzzlestücke haben die beiden Puzzle zusammen?

Staffel-Aufgaben $\boxed{6}$ (20 Punkte, Rest 360 Punkte)

Die Längen der vier Seiten des Vierecks $ABCD$ sind in der untenstehenden Abbildung angegeben. Das Viereck $ABCD$ ist außerdem ein Trapez, denn die Seiten AB und CD sind parallel.



Die Diagonalen AC und BD schneiden einander im Punkt P.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDP?

Staffel-Aufgaben $\boxed{7}$ (30 Punkte, Rest 330 Punkte)

Über zwei zweistelligen Zahlen $(10, 11, 12, \ldots, 99)$ wissen wir das Folgende.

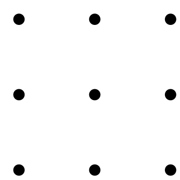
- Mindestens eine der Zahlen ist eine Quadratzahl;
- Mindestens eine der Zahlen ist ein Vielfaches von 13;
- Die Quersumme von mindestens einer Zahl ist 7;
- Die Summe der beiden Zahlen ist teilbar durch 9.

Unter diesen Bedingungen steht genau eine der beiden Zahlen fest.

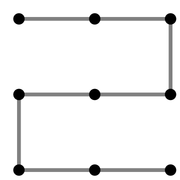
Gib diese Zahl an.
[Die Vielfachen von 13 sind 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130.]

Staffel-Aufgaben $\boxed{8}$ (20 Punkte, Rest 310 Punkte)

Gegeben ist ein Gitter mit 3×3 Punkten.



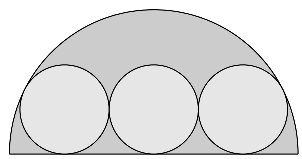
Durch das Verbinden von nebeneinander oder untereinander liegenden Punkten können wir einen zusammenhängenden Pfad erstellen, der jeden Punkt genau *einmal* durchläuft.



Wie viele solcher Pfade sind möglich?

Staffel-Aufgaben $\boxed{9}$ (30 Punkte, Rest 280 Punkte)

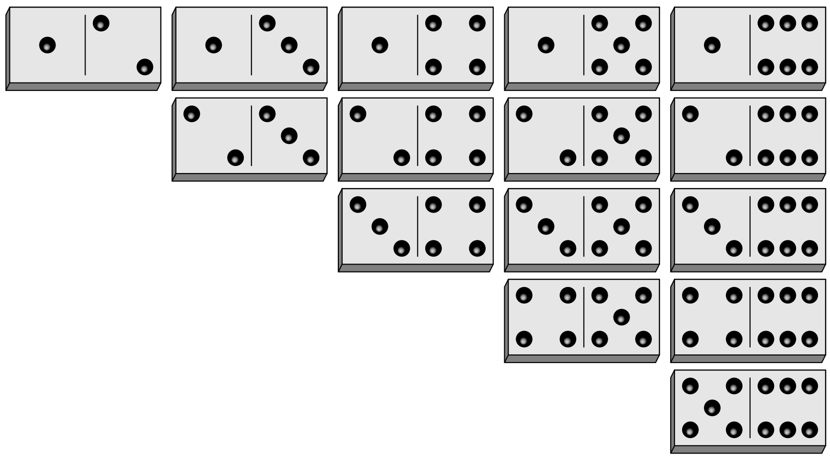
Drei kleine Kreise mit dem Radius 1 berühren einander, sowie den Rand eines großen Halbkreises. Dies ist in der untenstehenden Abbildung angegeben. (Insgesamt gibt es 7 Berührpunkte.)



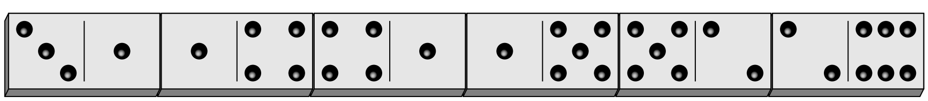
Wie groß ist der Radius des großen Halbkreises?

Staffel-Aufgaben $\boxed{10}$ (20 Punkte, Rest 260 Punkte)

Gegeben sind 15 Dominosteine, wie in der untenstehenden Abbildung angegeben. Wie du siehst, ist jeder Dominostein in zwei quadratische Hälften mit schwarzen Noppen unterteilt. Die quadratischen Hälften nennen wir *halbe Dominosteine* und die schwarzen Noppen nennen wir *Augen*.



Bei einer *verbindenden* Reihe von Dominosteinen werden stets zwei kurze Seiten so aneinandergelegt, dass die Augenzahlen der beiden aneinanderliegenden halben Dominosteine übeinstimmen. Ein Beispiel für eine solche verbindende Reihe ist

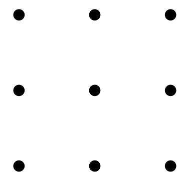


Das *Defizit* einer verbindenden Reihe ist die Summe der Augenzahlen aller Steine, die *nicht* in der Reihe vorkommen.

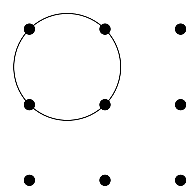
Wie groß ist das kleinstmögliche Defizit?

Staffel-Aufgaben $\boxed{11}$ (30 Punkte, Rest 230 Punkte)

Gegeben ist ein Gitter von 3×3 Punkten.



Hierunter ist ein Kreis gezeichnet, der durch 4 Punkte des Gitters verläuft.

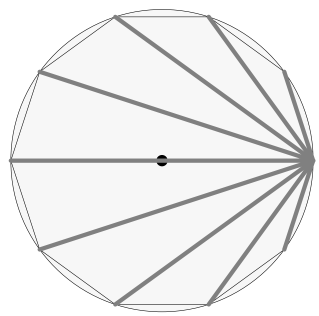


Es gibt keine Kreise, die durch 5 Punkte des Gitters verlaufen.

Wie viele verschiedene Kreise gibt es, die durch 4 Punkte des Gitters verlaufen?

Staffel-Aufgaben $\boxed{12}$ (20 Punkte, Rest 210 Punkte)

Gegeben ist ein regelmäßiges Zehneck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit Radius 1 liegen. Jemand wählt einen Eckpunkt des Zehnecks aus und bestimmt die Abstände von diesem Punkt zu den 9 übrigen Eckpunkten des Zehnecks.



*Wie groß ist die Summe der **Quadrate** der 9 Abstände?*

Staffel-Aufgaben $\boxed{13}$ (30 Punkte, Rest 180 Punkte)

Wir beginnen mit den vier Ziffern $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$. Während eines *Schrittes* erhöhen wir eine der vier Ziffern um 1. In 8 aufeinanderfolgenden Schritten können wir dann die Ziffernkombination $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{5}$ erstellen.

Auf wie viele Arten können wir die Reihenfolge dieser 8 *Schritte wählen, wobei zusätzlich die dritte Ziffer niemals größer als die vierte Ziffer sein soll?*
[Beispiel: $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$ ist nicht erlaubt (nach 2 der 8 Schritte).]

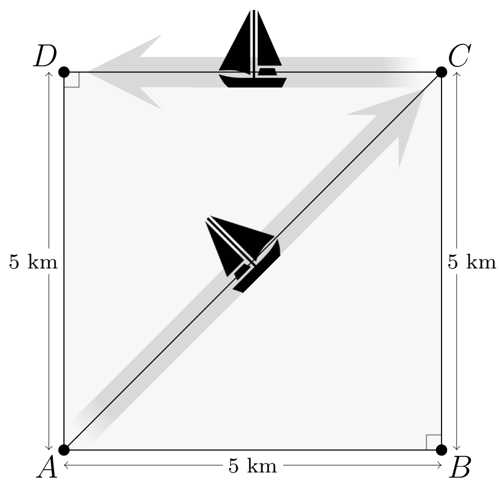
Staffel-Aufgaben $\boxed{14}$ (20 Punkte, Rest 160 Punkte)

Thomas denkt sich vier positive, ganze Zahlen. Er bildet nun alle möglichen Zahlenpaare und rechnet für jedes Zahlenpaar die Summe der beiden Zahlen aus. Auf diese Weise erhält er folgende sechs Ergebnisse 8, 10, 14, 16, 20 und 22.

Wie groß ist die Differenz zwischen der größten und der kleinsten der vier Zahlen?

Staffel-Aufgaben $\boxed{15}$ (30 Punkte, Rest 130 Punkte)

Das Quadrat $ABCD$ befindet sich auf offenem Wasser und besitzt eine Seitenlänge von 5 Kilometern. Zwei Königskinder sitzen jeweils auf einem Segelboot. Da ein Sturm aufgekommen ist, können sie nicht zueinander segeln.



Das Boot von einem der beiden Königskinder fährt mit konstanter Geschwindigkeit von A nach C. Das Boot des zweiten Königskindes fährt in der gleichen Zeit mit konstanter Geschwindigkeit von C nach D.

Wie groß ist der kleinste Abstand zwischen den beiden Booten, der sich während der Fahrt einstellt?

Staffel-Aufgaben $\boxed{16}$ (20 Punkte, Rest 110 Punkte)

Wir denken uns eine positive, ganze Zahl a mit 9 Ziffern und setzen

$$a = c_1c_2c_3 \cdots c_9,$$

wobei c_i stets die i-te Ziffer von a ist. Weiter soll gelten

$$c_1 = 1, \qquad c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_8, \qquad c_8 < c_9$$

Wie groß ist die größtmögliche Quersumme der Zahl $9 \times a$*?*

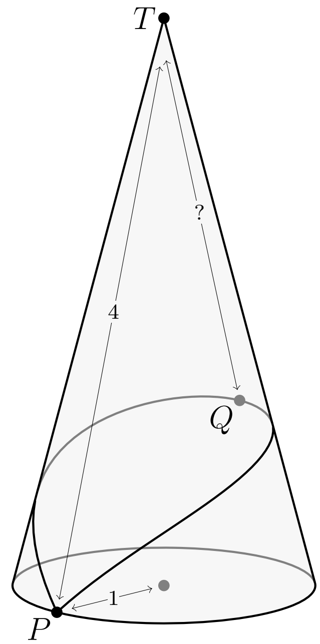
Staffel-Aufgaben $\boxed{17}$ (30 Punkte, Rest 80 Punkte)

Betrachte dreistellige Zahlen, bei denen nur die mittlere Ziffer eine 0 ist. Drei dieser Zahlen sind teilbar durch die zweistellige Zahl, die man erhält, wenn man die 0 in der ursprünglichen Zahl weglässt.

Wie groß ist die ***Summe*** *dieser drei Zahlen?*
[307 ist *nicht* eine der gesuchten drei Zahlen, denn 37 ist kein Teiler von 307.]

Staffel-Aufgaben $\boxed{18}$ (20 Punkte, Rest 60 Punkte)

Gegeben ist ein Kegel mit der Spitze T. Der Abstand von T zum Punkt P auf dem Rand der Grundseite beträgt 4. Der Radius des Grundkreises ist 1.



Am Punkt P befestigen wir ein Gummiband. Danach ziehen wir die andere Seite des Gummibandes über die Spitze des Kegels, sodass es straff am Kegel anliegt. Das Band liegt so an, dass es die kürzeste Ausdehnung hat.
Wir nehmen an, dass zwischen dem Gummiband und dem Kegel keine Reibung entsteht. Weiterhin sei Q der Punkt des Gummibandes, der von der Spitze T den kleinsten Abstand hat.

Wie groß ist der Abstand zwischen T und Q?

Staffel-Aufgaben $\boxed{19}$ (30 Punkte, Rest 30 Punkte)

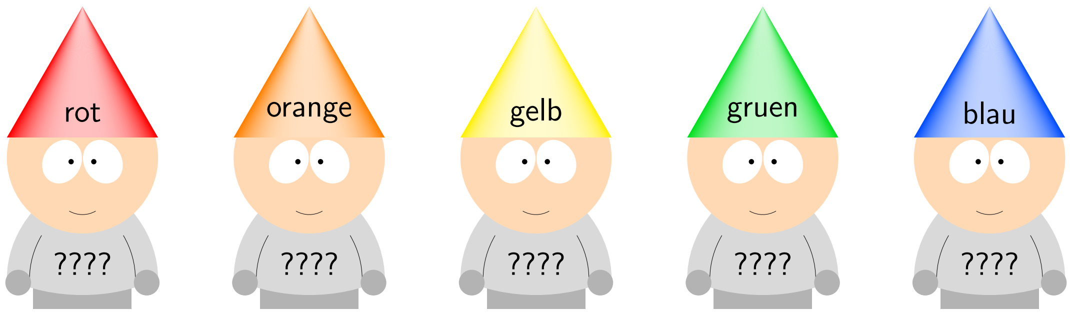
Zwei positive, ganze Zahlen a und b lassen sich so wählen, dass

$$b^3 - a^3 = 2015$$

*Wie groß ist die **Summe** von a und b?*

Staffel-Aufgaben $\boxed{20}$ (30 Punkte, Rest 0 Punkte)

Die SchülerInnen in der Klasse von Fräulein Sonntag tragen Hüte. Es gibt Hüte in 5 unterschiedlichen Farben: rot, orange, gelb, grün oder blau. Fräulein Sonntag, die keinen Hut trägt, sieht, dass in ihrer Klasse jeder der 5 SchülerInnen Anja, Bert, Caro, Dirk und Emma einen Hut in einer anderen Farbe trägt.



Jeder kann die Hüte der anderen, nicht aber seinen eigenen Hut sehen.

- Anja sieht genauso viele rote wie orange Hüte;
- Bert sieht genauso viele orange wie gelbe Hüte;
- Caro sieht genauso viele gelbe wie grüne Hüte;
- Dirk sieht genauso viele grüne wie blaue Hüte;
- Emma sieht genauso viele blaue wie rote Hüte.

Außerdem ist die Summe blauer und roter Hüte, die Emma sieht, genauso groß, wie die Summe grüner, gelber und oranger Hüte, die sie sieht.

Wir wissen weiterhin, dass die Anzahl der SchülerInnen in der Klasse von Fräulein Sonntag eine zweistellige Zahl ist, deren Quersumme *nicht* durch 4 teilbar ist.

Wie viele SchülerInnen sind in der Klasse von Fräulein Sonntag?